Unidad Didáctica V: Geometría

El estudiante al terminar la unidad didáctica de Geometría deberá dominar los siguientes contenidos:

1. Comprensión y aplicación de los conceptos de círculo y circunferencia (radio, cuerda, diámetro, arco, semicircunferencia, arco menor, arco mayor, secante, tangente interior y exterior de la circunferencia).
2. Relaciones entre ángulos y segmentos de un círculo.
3. Resolución de problemas utilizando: círculo, circunferencia y conceptos afines.
4. Polígonos (definición, tipos de polígonos, diagonales, ángulos internos y externos de un polígono).
5. Cálculo de área y perímetro de un polígono.
6. Sólidos (definición, tipos de sólidos: prisma, pirámide, cono circular recto, cilindro circular recto y esfera).
7. Cálculo del área lateral y total de los sólidos.
8. Volumen de los sólidos.

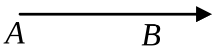
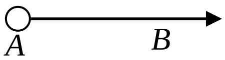
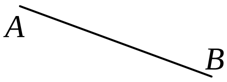
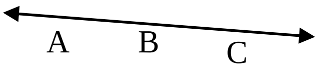
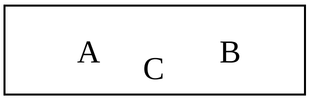
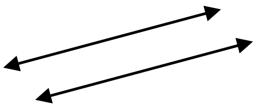
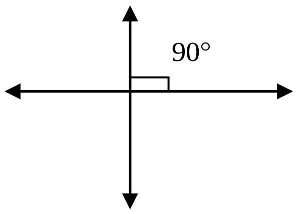
Al terminar de estudiar este tema con sus ejercicios y problemas, el estudiante debe ser capaz de:

1. Comprender y aplicar los conceptos de círculo y circunferencia, así como los elementos de estos y sus relaciones (radio, cuerda, diámetro, arcos, secante, tangente, ángulos y segmentos).
2. Calcular el área y el perímetros de polígonos, así como resolver problemas relacionados con sus elementos (tipos de polígonos, diagonales, ángulos internos y externos).
3. Calcular el área y el volumen de diferentes sólidos (prisma, pirámide, cono circular recto, cilindro circular recto y esfera).
4. Resolver problemas relacionados con los diferentes tipos de sólidos.

I. Conocimientos previos

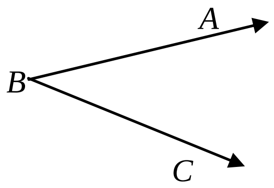
Los siguientes son algunos conceptos básicos que el estudiante debe dominar, y se consideran conocimientos previos al estudio de los temas de polígonos, círculo y circunferencia y estereometría.

1. Términos:representación gráfica y notación

Término	Representación gráfica	Notación
Punto		$A, B, C, ...$
Recta		$l, m, r, ...$
Plano		$\pi, \alpha, \beta, \delta, ...$
Rayo		$\overrightarrow{AB}$
Semirrecta		$\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$
Segmento		$\overline{AB}$
Puntos colineales		$A-B-C$
Puntos coplanares		A, B, C
Rectas paralelas		$l \parallel m$
Rectas perpendiculares		$l \perp m$

2. Ángulos

a. Definición: Un ángulo es la unión de dos rayos con el mismo origen, tal que no sean rayos colineales, ni el mismo rayo. El ángulo que es la unión de los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ se denota por $\measuredangle B = \measuredangle ABC = \measuredangle CBA$. Su representación gráfica corresponde a



b. Medida de un ángulo: La medida angular o medida de un ángulo es un número entre $0°$ y $180°$, sin incluirlos. La medida del $\measuredangle MPQ$ se denota por $m\measuredangle MPQ$. Por ejemplo, si el $\measuredangle MPQ$ tiene una medida de $38°$, entonces se escribe $m\measuredangle MPQ = 38°$.

c. Ángulos complementarios: Un par de ángulos se llaman complementarios si la suma de sus medidas es igual a $90°$.

d. Ángulos suplementarios: Un par de ángulos se llaman suplementarios si la suma de sus medidas es igual a $180°$.

e. Ángulos congruentes: Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Si el $\measuredangle ABC$ es congruente con el $\measuredangle DTN$ entonces se denota por $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DTN$.

f. Rayo bisector de un ángulo: Si en el $\measuredangle ABC$ se cumple que $\measuredangle ABD \cong \measuredangle DBC$ entonces al rayo $\overrightarrow{BD}$ se llama rayo bisector.

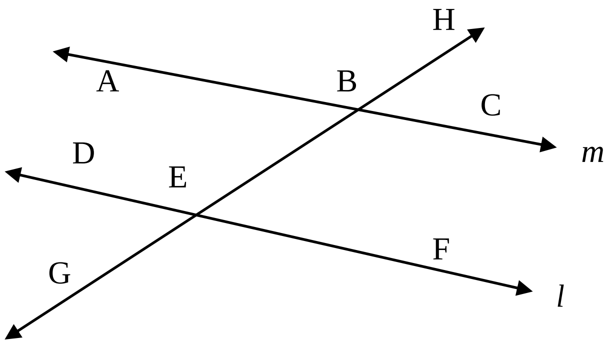
g. Clasificación de ángulos según su medida:

g.1 Ángulo agudo: Es aquel ángulo cuya medida está entre $0°$ y $90°$.
g.2 Ángulo recto: Es aquel ángulo cuya medida es igual a $90°$.
g.3 Ángulo obtuso: Es aquel ángulo cuya medida está entre $90°$ y $180°$.

h. Clasificación de ángulos según su posición:

h.1 Ángulos consecutivos: Dos ángulos distintos son consecutivos si tienen un lado en común.
h.2 Ángulos adyacentes o par lineal: Dos ángulos distintos son adyacentes o forman par lineal si son consecutivos y son suplementarios.
h.3 Ángulos opuestos por el vértice: Si se cumple $A-B-C$ *y* $D-B-M$*,* entonces los ángulos $\measuredangle DBC$ y $\measuredangle ABM$ se llaman opuestos por el vértice. También $\measuredangle DBA$ y $\measuredangle CBM$ se llaman opuestos por el vértice. Los pares de ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

3. Ángulos entre dos rectas paralelas y una transversal



$l \parallel m$

H *recta transversal*

a. **Ángulos alternos**: un par de ángulos son alternos si se encuentran en diferentes lados de la recta transversal, por ejemplo: $\sphericalangle ABH$ y $\sphericalangle BEF$ son ángulos alternos.

b. **Ángulos internos**: $\sphericalangle DEB, \sphericalangle BEF, \sphericalangle ABE$ y $\sphericalangle CBE$ son ángulos internos.

c. **Ángulos externos**: $\sphericalangle ABH, \sphericalangle HBC, \sphericalangle DEG$ y $\sphericalangle FEG$ son ángulos externos.

d. **Ángulos alternos internos**: dos ángulos son alternos internos si son internos, alternos y no adyacentes. Por ejemplo $\sphericalangle DEB$ y $\sphericalangle CBE$ son alternos internos. Estos ángulos son congruentes entre sí.

e. **Ángulos alternos externos**: dos ángulos son alternos externos si son externos, alternos y no adyacentes. Por ejemplo $\sphericalangle ABH$ y $\sphericalangle GEF$ son alternos externos. Estos ángulos son congruentes entre sí.

f. **Ángulos correspondientes**: dos ángulos que están del mismo lado de la recta transversal, uno interno, otro externo y que no sean adyacentes. Por ejemplo: $\sphericalangle HBC$ y $\sphericalangle BEF$. Estos ángulos son congruentes entre sí.

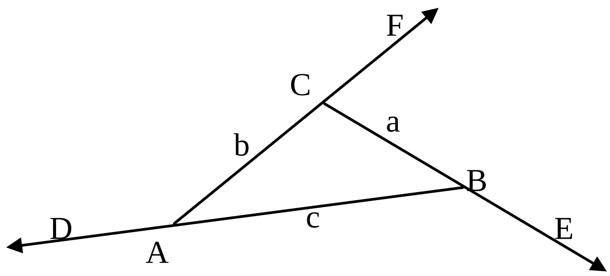
g. **Ángulos conjugados internos**: dos ángulos internos y que se encuentran al mismo lado de la transversal. Por ejemplo $\sphericalangle ABE$ y $\sphericalangle DEB$. Estos ángulos son suplementarios.

h. **Ángulos conjugados externos**: dos ángulos externos y que se encuentran al mismo lado de la transversal. Por ejemplo $\sphericalangle HBC$ y $\sphericalangle GEF$. Estos ángulos son suplementarios.

4. Triángulos

Un triángulo es la unión de tres segmentos, que se intersecan en sus extremos, dos a dos. A los puntos A, B y C se les llama vértices del triángulo. A los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se les llama lados del triángulos. A los ángulos $\measuredangle A, \measuredangle B$ y $\measuredangle C$ se les llama ángulos internos del triángulo. Al triángulo con vértices A, B y C se le denota por $\triangle ABC$. Si se cumple $A-C-F; C-B-E; B-A-D$ entonces los ángulos $\measuredangle DAC, \measuredangle EBA, \measuredangle FCB$ se les llama ángulos externos del triángulo.

Considere el $\triangle ABC$, con $AB = c; BC = a; AC = b$.



a. Desigualdad triangular: En todo triángulo se cumple que

a.1 $a+b<c$
a.2 $a+c<b$
a.3 $b+c<a$.

b. Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo: En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. En el triángulo anterior se cumple que $m\measuredangle A + m\measuredangle B + m\measuredangle C = 180^\circ$

c. Suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo: En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo es igual a 360°. En el triángulo anterior se cumple que $m\measuredangle DAC + m\measuredangle EBA + m\measuredangle FCB = 360^\circ$.

d. Medida del ángulo externo de un triángulo: La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes con él. Por ejemplo, en el triángulo anterior, se cumple que $m\measuredangle DAC = m\measuredangle C + m\measuredangle B$.

e. Clasificación de triángulos según la medida de sus lados:

e.1 Equilátero: Un triángulo es equilátero si sus tres lados son congruentes.
e.2 Isósceles: Un triángulo es isósceles si, al menos, dos de sus lados son congruentes.
e.3 Escaleno: Un triángulo es escaleno si ningún par de lados es congruente, dos a dos.

f. Clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos:

f.1 Acutángulo: Un triángulo es acutángulo si sus tres ángulos internos son agudos.

f.2 Obtusángulo: Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos internos es obtuso.

f.3 Rectángulo: Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos internos es recto.

5. Rectas notables de un triángulo

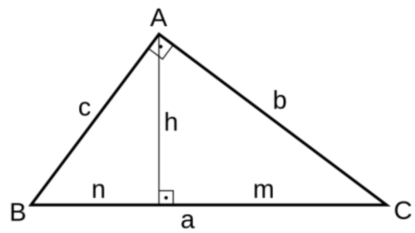
a. Altura: es la recta que contiene a uno de los vértices del triángulo y es perpendicular al lado opuesto del triángulo. El punto de intersección de las tres alturas de un triángulo se denomina ortocentro.

b. Mediana: es la recta que contiene uno de los vértices del triángulo y el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las tres medianas de un triángulo se denomina baricentro.

c. Mediatriz: Recta que es perpendicular a uno de los lados del triángulo en su punto medio. El punto de intersección de las tres mediatrices de un triángulo se denomina circuncentro.

d. Bisectriz: Recta que contiene al rayo bisector de uno de los ángulos del triángulo. El punto de intersección de las tres bisectrices de un triángulo se denomina incentro.

6. Teoremas importantes relacionados a triángulos rectángulos:



a. Teorema de Pitágoras: en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. $a^2 = b^2 + c^2$

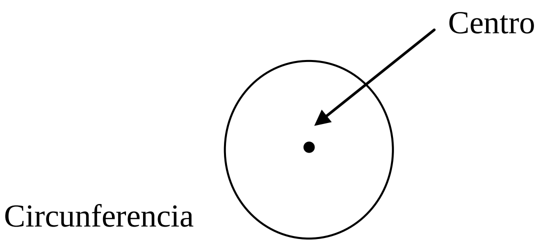
b. Teorema de la altura: En cualquier triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es la media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa$\left(h = \sqrt{mn}\right)$. En otros términos, en todo triángulo rectángulo la altura h (relativa a la hipotenusa) es igual al producto de sus catetos b y c divididos por la hipotenusa a $\left(h = \dfrac{bc}{a}\right)$.

c. **Teorema del cateto:** En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa $\left(b^2 = cm \text{ ó } a^2 = cn\right)$.

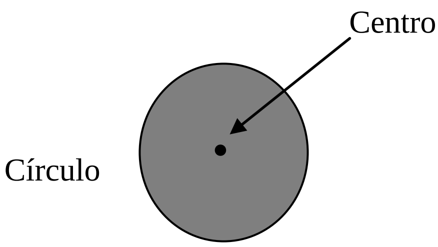
II. Círculo y circunferencia

1. Definiciones:

a. **Circunferencia**. Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo del mismo. A este punto fijo se le llama centro.

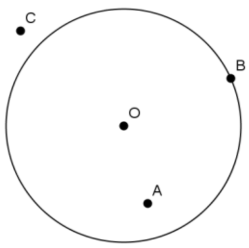


b. **Círculo**. Es la región delimitada por una circunferencia.



c. **Interior de la circunferencia:** conjunto de puntos coplanares a la circunferencia, que están a una distancia del centro menor que el radio.

d. **Exterior de la circunferencia:** conjunto de puntos coplanares a la circunferencia, que están a una distancia del centro mayor que el radio.



B es un punto de la circunferencia de centro O
A es un punto interior pues $OA < BO$
Ces un punto exterior pues $CO > BO$

2. Elementos de la circunferencia:

a. **Arco:** es una porción continua de una circunferencia.

b. **Semicircunferencia:** arco que corresponde a la mitad de una circunferencia.

c. **Arco menor:** es el arco que es inferior a una semicircunferencia.

d. **Arco mayor:** es el arco que es superior a una semicircunferencia.

e. **Radio:** es un segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Todos los radios de una circunferencia son congruentes entre sí.

   Si se considera al radio como un segmento, una circunferencia tiene un número infinito de radios. Mientras que, si se considera el radio como una distancia entonces cada circunferencia tiene un único radio, pues todos los puntos de la circunferencia están a igual distancia del centro.

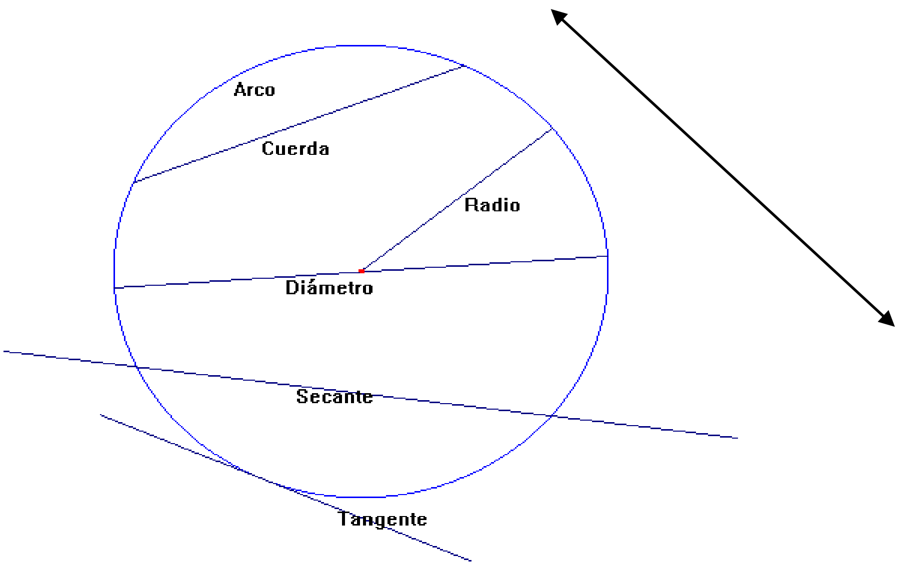
f. **Cuerda**: es un segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia.

g. **Diámetro**: es toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

h. **Recta secante**: es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos (distintos).

i. **Recta tangente**: Es una recta que tiene solamente un punto común con la circunferencia. Este punto se conoce con el nombre de punto de tangencia.

j. **Recta exterior a la circunferencia:** recta que pertenece al mismo plano de la circunferencia pero no la interseca.

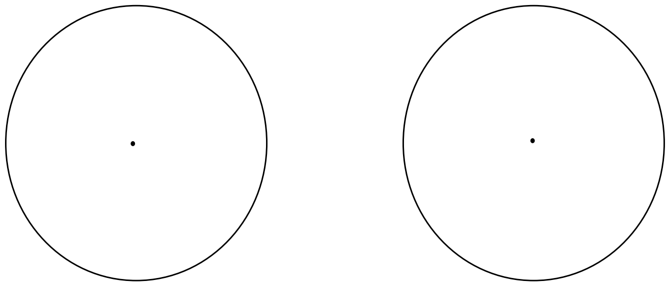


k. **Circunferencias congruentes:** dos o más circunferencias se dicen congruentes si sus radios son congruentes.

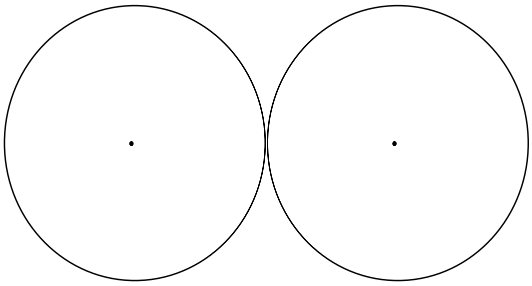
3. Posiciones relativas entre dos circunferencias

Dos circunferencias, en función de sus posiciones relativas, se denominan:

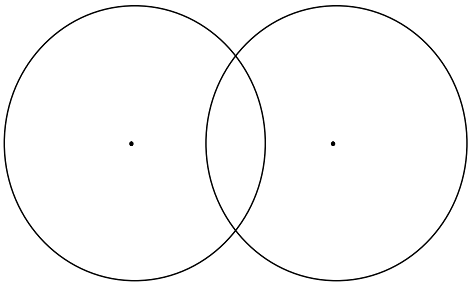
a. **Circunferencias exteriores**: si no tienen puntos comunes y la distancia que hay entre sus centros es mayor que la suma de sus radios. No importa que tengan igual o distinto radio.



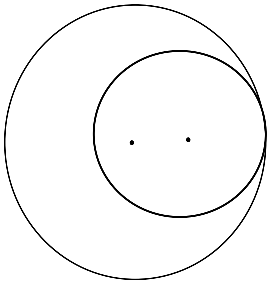
b. **Circunferencias tangentes exteriormente**: si tienen un punto común y todos los demás puntos de una son exteriores a la otra. La distancia que hay entre sus centros es igual a la suma de sus radios. No importa que tengan igual o distinto radio.



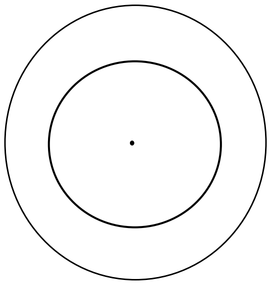
c. **Circunferencias secantes**: si se cortan en dos puntos distintos y la distancia entre sus centros es menor a la suma de sus radios. No importa que tengan igual o distinto radio. Dos circunferencias distintas no pueden cortarse en más de dos puntos. Dos circunferencias son *secantes ortogonalmente* si el ángulo entre sus tangentes en los dos puntos de contacto es recto.



d. **Circunferencias tangentes interiormente:** si tienen un punto común y todos los demás puntos de una de ellas son interiores a la otra exclusivamente. La distancia que hay entre sus centros es igual al valor absoluto de la diferencia de sus radios. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra.



e. **Circunferencias concéntricas**: si tienen el mismo centro (la distancia entre sus centros es 0) y distinto radio. Forman una figura conocida como corona circular o anillo. Una de ellas tiene que tener mayor radio que la otra.



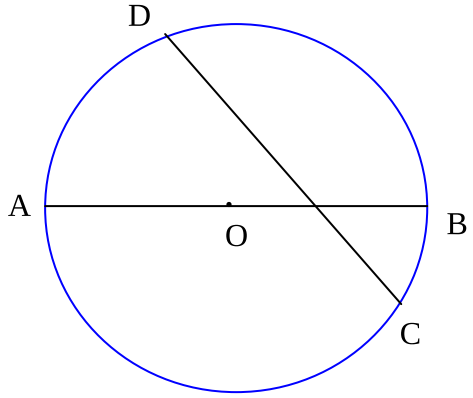
En Resumen:

Sean C_1 y C_2 circunferencias cuyos radios son r_1 y r_2 respectivamente:

Posición relativa entre C_1 y C_2	**Distancia entre sus centros** d_c
Exteriores	$d_c > r_1 + r_2$
Tangentes exteriormente	$d_c = r_1 + r_2$
Secantes	$d_c < r_1 + r_2$
Tangentes interiormente	$d_c = \lvert r_1 - r_2 \rvert$
Concéntricas	$d_c = 0$

4. Teoremas relativos a la circunferencia:

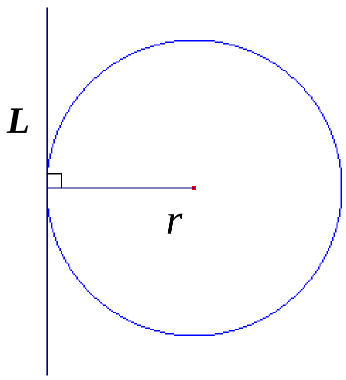
1. El diámetro es la cuerda de mayor longitud en la circunferencia. Su medida es igual a la suma de dos radios.



AB > CD

AB = AO + OB = 2·AO = 2·OB

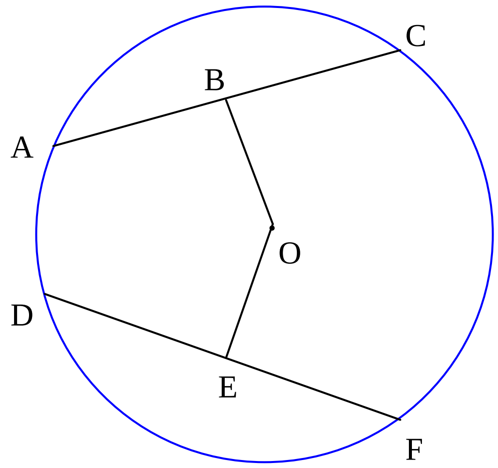
2. Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.



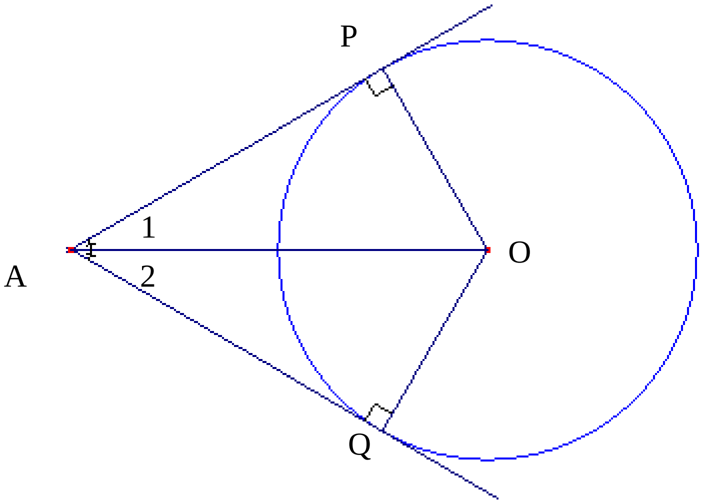
$r \perp L$

3. En una misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, dos cuerdas son congruentes si y sólo si son equidistantes del centro de la circunferencia.

$\overline{DF} \cong \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{BO} \cong \overline{EO}$



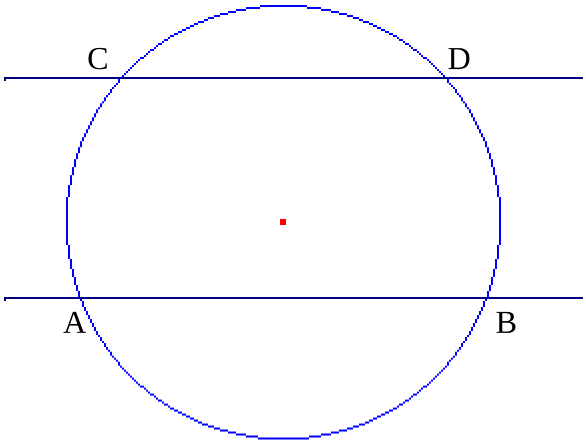
4. Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales y el segmento que une dicho punto con el centro de la circunferencia es bisectriz del ángulo formado por las tangentes.



$AP = AQ$

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

5. En una circunferencia rectas paralelas determinan arcos iguales.

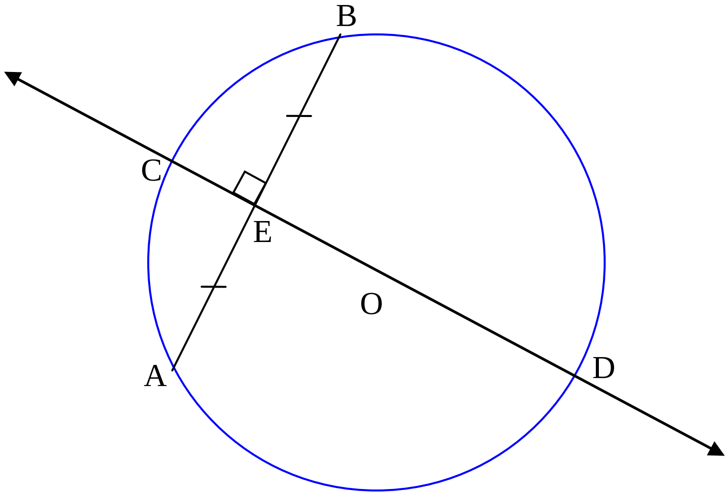


$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$AC = DB$

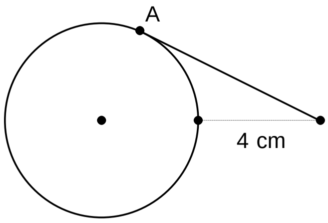
6. Una recta que biseca una cuerda de una circunferencia es perpendicular a dicha cuerda si y sólo si la recta pasa por el centro de la circunferencia.

AE = EB , $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ y $\overline{CD}$ es diámetro



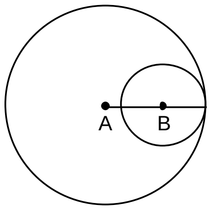
Ejemplos

1. Considere la figura adjunta de una circunferencia de diámetro 12 cm. Desde un punto exterior, ubicado a 4 cm de la circunferencia se traza un segmento tangente, en el punto A ubicado en la circunferencia, calcule la longitud, en centímetros, de dicho segmento.



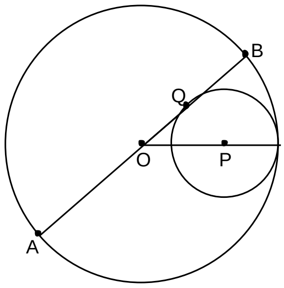
R/ 8

2. Las circunferencias adjuntas son tangentes interiormente. La longitud de la circunferencia mayor es $10\pi\,\text{cm}$ y la distancia entre los centros A y B es $3\,\text{cm}$, determine la longitud, en centímetros, de la circunferencia menor.



R/ 4π

3. En la figura adjunta las circunferencias de centros O y P son tangentes, $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia menor en el punto Q, $OA = 10\,\text{cm}$ y la longitud de la circunferencia menor es $8\pi\,\text{cm}$. Calcular, en centímetros, la medida del segmento $\overline{OQ}$.



R/ $2\sqrt{5}$

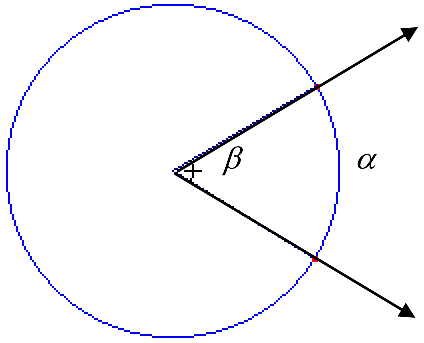
4. En una circunferencia de radio r, una cuerda y un diámetro tienen un extremo en común. La longitud de la cuerda es la mitad de la longitud del diámetro. Hallar la distancia entre la cuerda y el centro de la circunferencia.

R/ $\dfrac{r}{2}\sqrt{3}$

5. Ángulos de la circunferencia

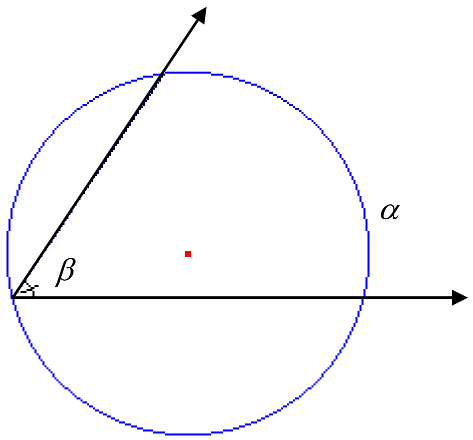
a. **Ángulo central**: es todo ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia. Su medida es igual a la del arco subtendido por sus lados.

β : Ángulo central. α : Arco subtendido por los lados del ángulo central.



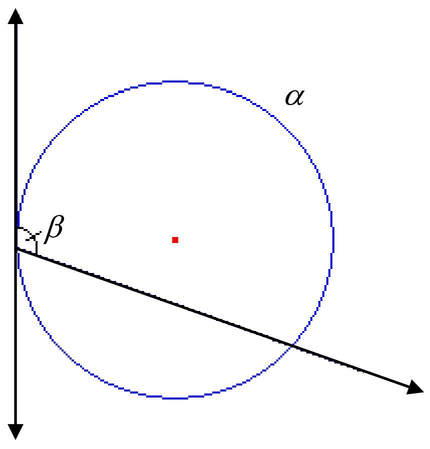
$$\beta = \alpha$$

b. **Ángulo inscrito**: es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y cuyos lados son secantes. Su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.



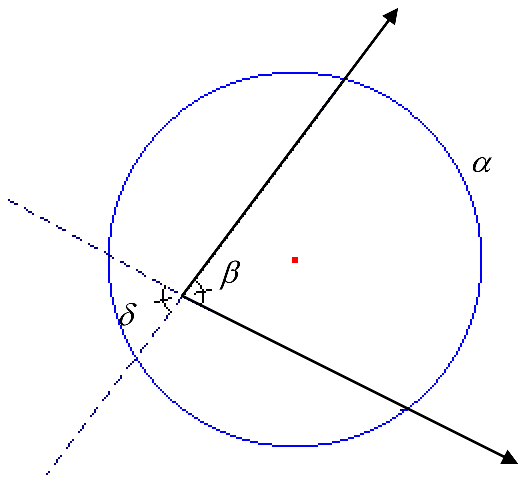
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

c. **Ángulo semi-inscrito**: es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados son una secante y una tangente. Tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.



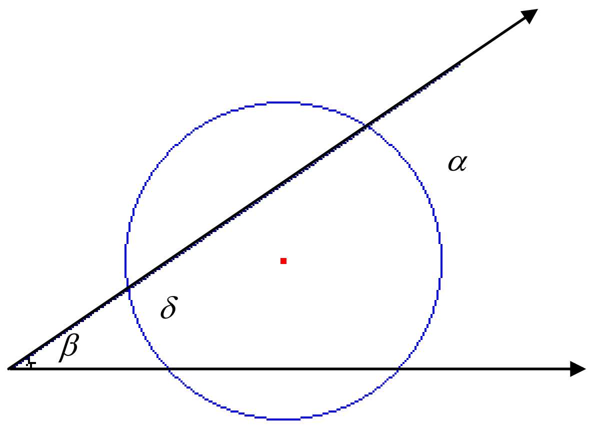
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

d. **Ángulo interior**: es aquel cuyo vértice se encuentra en el interior de la circunferencia. Su medida es igual a la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.



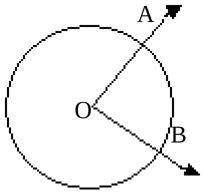
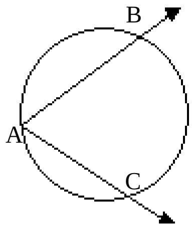
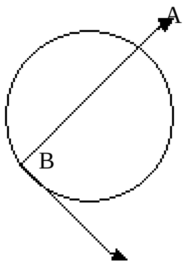
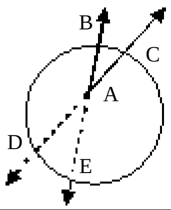
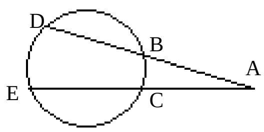
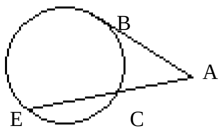
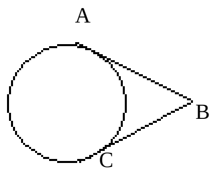
$\beta = \dfrac{\alpha + \delta}{2}$ δ : Arco subtendido por las prolongaciones de los lados del ángulo.

e. **Ángulo exterior: e**s aquel cuyo vértice se encuentra en el exterior de la circunferencia, su medida es la semidiferencia de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados.



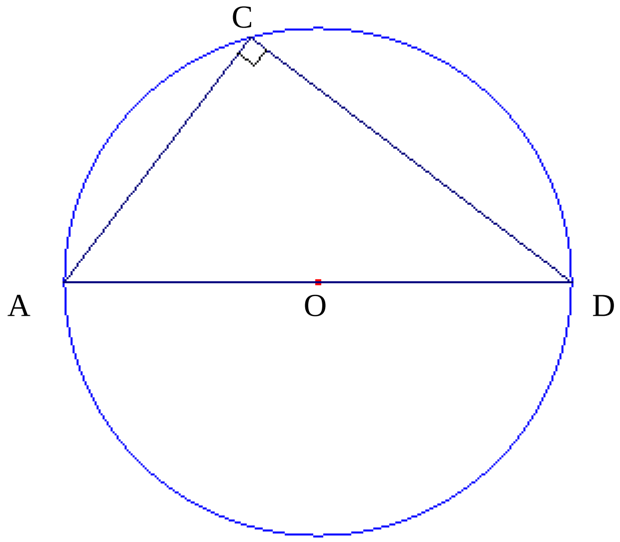
$\beta = \dfrac{\alpha - \delta}{2}$ δ : Arco menor subtendido por los lados del ángulo externo.

Resumen ángulos en la circunferencia

Ángulos en la circunferencia				
Ángulo	**Definición: es el ángulo que tiene el vértice en**	**Dibujo**	**Medida igual a la**	**Fórmula**
Central	el centro de la circunferencia		medida del arco que intercepta	AB
Inscrito	la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma		mitad de la medida del arco interceptado	$\dfrac{mBC}{2}$
Seminscrito	la circunferencia, uno de los dados es tangente y el otro es una cuerda		mitad de la medida del arco interceptado	$\dfrac{mAB}{2}$
Interior	un punto interior a la circunferencia		semisuma de las medidas de los arcos subtendidos	$\dfrac{mDE+mBC}{2}$
Exterior	un punto exterior a la circunferencia, sus lados secantes o uno secante y el otro tangente	 	semidiferencia de las medidas del arco mayor y menor subtendidos	$\dfrac{mDE-mBC}{2}$ $\dfrac{mBE-mBC}{2}$
	un punto exterior a la circunferencia, sus lados tangentes a la misma		diferencia de $180°$ y la medida del arco menor subtendido	$180°-mAC$

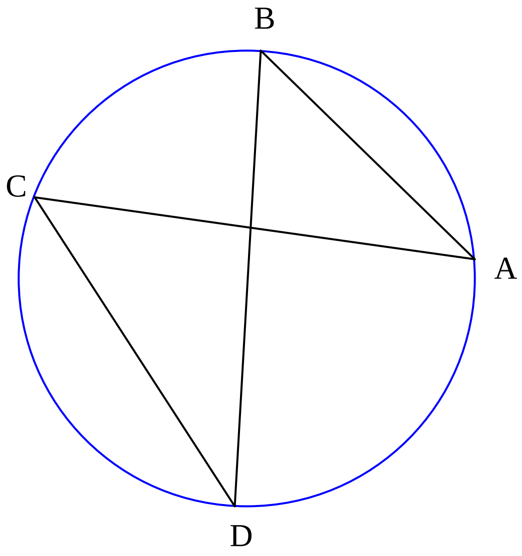
Observaciones importantes:

a. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



$\measuredangle C = 90°$

b. Ángulos inscritos al mismo arco son congruentes.

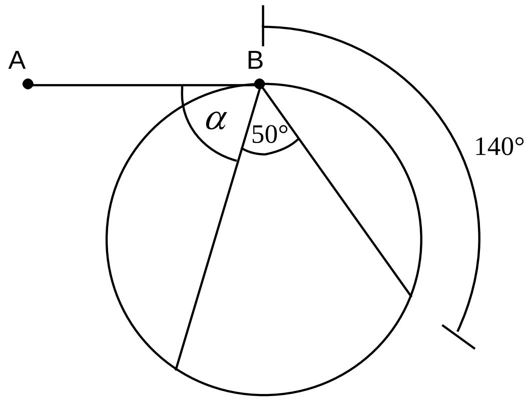


$\measuredangle C \cong \measuredangle B$

$\measuredangle D \cong \measuredangle A$

Ejemplos

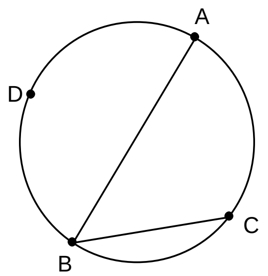
1. Considere la figura adjunta en la que $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia.



Calcular el valor del ángulo α .

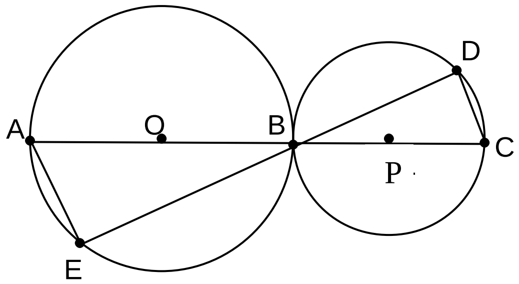
R/ 60°

2. En la figura adjunta ADB mide el doble de AC y AC mide 20° más que BC . Calcular la medida del $\measuredangle ABC$.



R/ $47,5^{\circ}$

3. La figura adjunta presenta dos circunferencias tangentes con centro O y P .



Si $m\,DC = 50^{\circ}$, entonces determine la medida del ángulo $\measuredangle CAE$.

R/ 65°

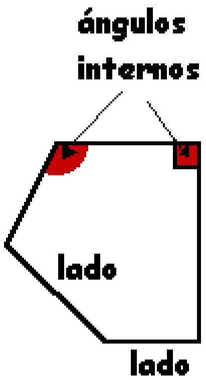
III. Polígonos

Un polígono es una región del plano limitada por tres o más segmentos de recta. Los segmentos forman los lados del polígono y sus intersecciones los vértices. Los ángulos internos de un polígono están definidos por cada dos de sus lados consecutivos.

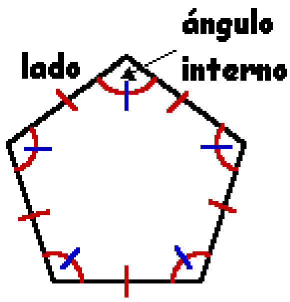
1. Clasificación de polígonos:

a) De acuerdo con las medidas de los lados o de los ángulos

c. **Polígono equiángulo:** polígono cuyos ángulos internos son todos congruentes entre sí.
d. **Polígono equilátero:** polígono cuyos lados son todos congruentes entre sí.
e. **Polígono regular:** es aquel en el cual todos sus lados y sus ángulos internos son iguales entre sí.
f. **Polígono irregular:** es aquel polígono que no es equilátero ni equiángulo.



Polígono irregular



Polígono regular

b) De acuerdo al número de lados

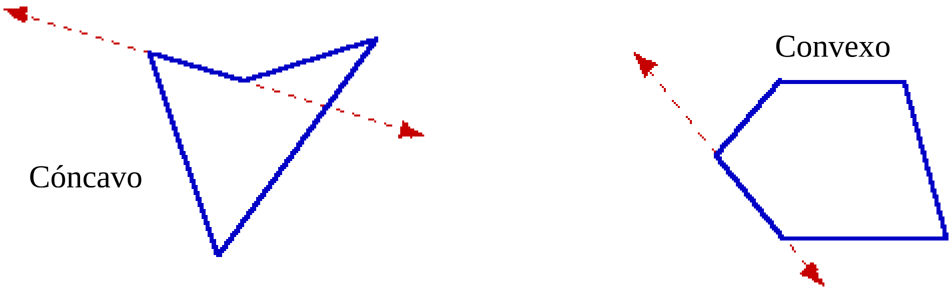
Se clasifican en:

Número de lados	Nombre que recibe
Tres	Triángulo
Cuatro	Cuadrilátero
Cinco	Pentágono
Seis	Hexágono
Siete	Heptágono
Ocho	Octágono
Nueve	Nonágono
Diez	Decágono
Once	Endecágono
Doce	Dodecágono
Quince	Pentadecágono

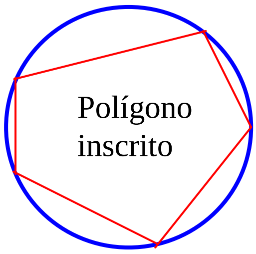
Aún pueden mencionarse más pero para efectos del curso basta con los anteriores.

c) Polígonos cóncavos y convexos

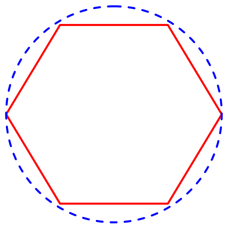
Si se prolongan los lados de un polígono y toda la figura queda siempre del mismo lado, se dice que el polígono es convexo. En caso contrario el polígono se denominara cóncavo (no convexo).



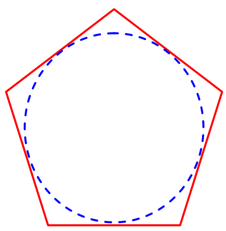
Nota 1: se dice que un polígono es inscribible en una circunferencia cuando todos sus vértices pertenecen a una misma circunferencia.



Nota 2: Todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia.



Nota 3: A todo polígono regular se le puede inscribir una circunferencia.



En síntesis:

- POLÍGONOS
  - Convexos
    - Inscribible en una Circunferencia
      - Regular
      - No Regular
    - No inscribible en una Circunferencia
  - Cóncavos

2. Elementos de un polígono regular

a. Radio del polígono: es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono.

b. Apotema del polígono: es el radio de la circunferencia inscrita al polígono.

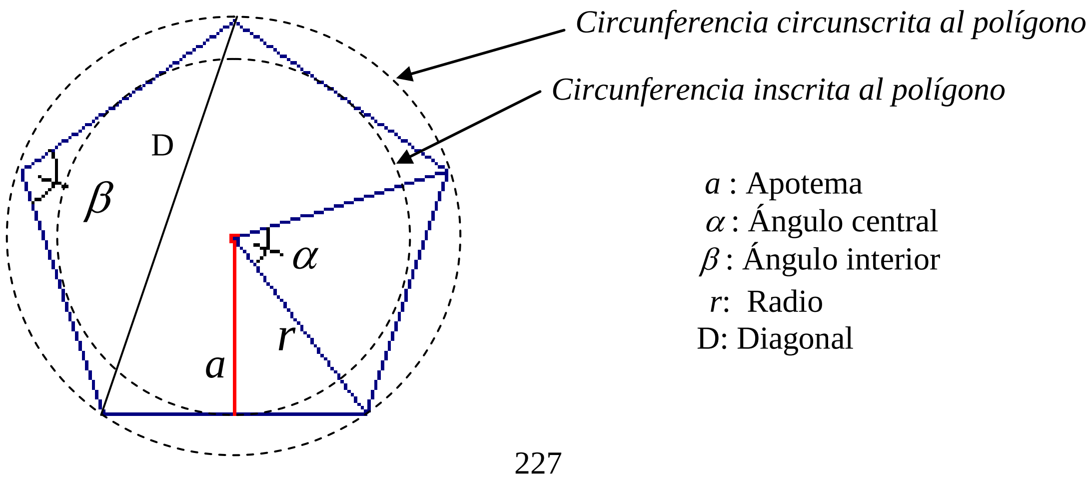
c. Ángulo interior del polígono: En un polígono de n lados su medida viene dada por

$$m\measuredangle\beta = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

d. Ángulo central del polígono: En un polígono de n lados su medida viene dada por

$$m\measuredangle\alpha = \frac{360°}{n}.$$

e. Diagonales de un polígono: En un polígono de n lados, la cantidad de diagonales que se pueden trazar viene dada por $D = \frac{n(n-3)}{2}$



Algunos datos importantes relacionados con los polígonos regulares

<table>
<tr><th>Simbología</th><th>Triángulo equilátero</th><th>Cuadrado</th><th>Hexágono regular</th></tr>
<tr><td>r radio</td><td rowspan="2">$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$</td><td rowspan="5">$\ell = \frac{d\sqrt{2}}{2}$</td><td rowspan="5">$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$</td></tr>
<tr><td>d diagonal</td></tr>
<tr><td>a apotema</td><td rowspan="3">$a = \frac{h}{3}$</td></tr>
<tr><td>ℓ lado</td></tr>
<tr><td>h altura</td></tr>
</table>

Ejemplos

1. La medida del radio de un pentágono regular es $9cm$. Calcular la medida aproximada de su apotema.

R/ $7,28cm$

2. Calcular el número total de diagonales y la medida de cada uno de los ángulos externos de un octágono regular.

R/ 20 diagonales y cada ángulo externo mide 45°.

3. En un polígono regular se pueden trazar siete diagonales desde cada vértice. Si cada lado mide 4 centímetros, calcule la medida del radio del polígono.

R/ $\frac{2}{sen\left(18^{\circ}\right)}$

4. Si un ángulo interno de un polígono regular mide 108°, halle la medida de un ángulo externo, la medida del ángulo central y el número de lados del polígono.

R/ 72°, 72°, 5 lados.

5. Determine el valor de la apotema de un hexágono regular si el radio de su circunferencia inscrita mide 24 centímetros.

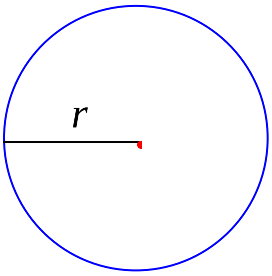
R/ 24 centímetros.

6. Nombre el polígono que tiene 90 diagonales.

R/ Pentadecágono.

3. Áreas y perímetros.

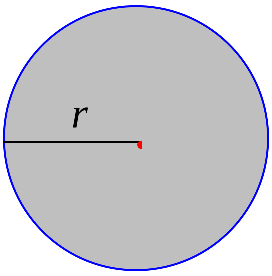
a. El perímetro (longitud) de una circunferencia es igual al doble de π multiplicado por el radio.



$$P = 2\pi r$$

P: perímetro
r: radio

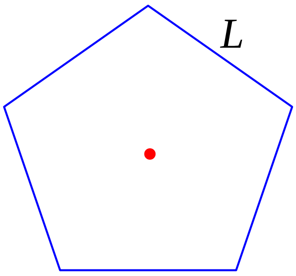
b. El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio.



$$A = \pi r^2$$

A: área
r: radio

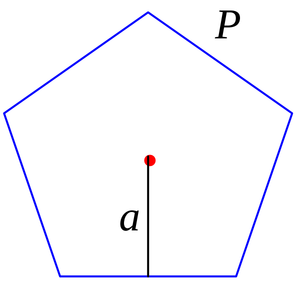
c. El perímetro de un polígono regular de *n* lados es igual al producto de *n* por la medida de uno de sus lados.



$$P = nL$$

P: perímetro
n: número de lados
L: medida de un lado

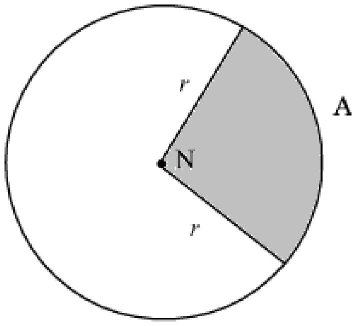
d. El área de un polígono regular de *n* lados es igual a la mitad del producto de su perímetro por su apotema.



$$A = \frac{Pa}{2}$$

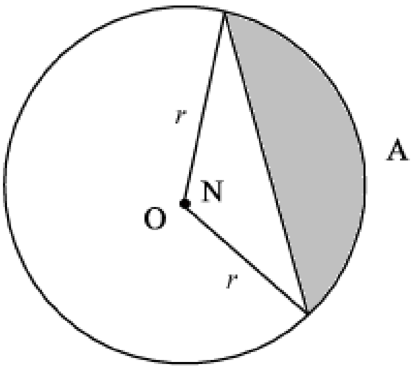
A: área
P: perímetro
a: apotema

e. Se denomina sector circular a la porción de círculo comprendido entre un arco de circunferencia y sus respectivos radios delimitadores. El área de un sector circular depende de dos parámetros, el radio y el ángulo central, y está dada por la siguiente fórmula:



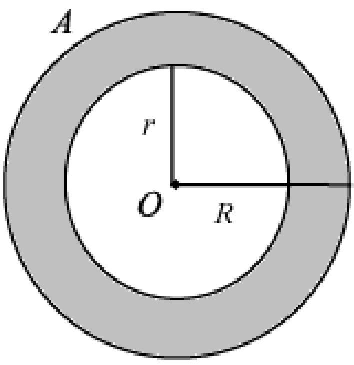
$$\mathrm{A} = \frac{\pi\, r^2\, \mathrm{N}}{360°}$$

f. Un segmento circular o segmento de un círculo es la porción de un círculo limitada por una cuerda y el arco correspondiente. El área del segmento circular es igual al área del sector circular menos el área de la porción triangular.



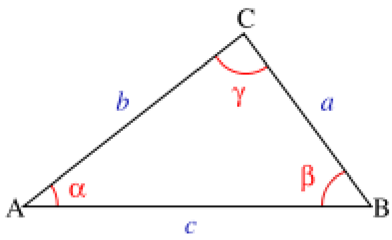
$$A = \frac{\pi\, r^2\, \mathrm{N}}{360°} - \text{área del } \Delta$$

g. Una corona circular es una figura geométrica plana delimitada por dos circunferencias concéntricas. Para determinar la superficie de una corona circular tenemos que encontrar la diferencia entre las áreas de los dos círculos concéntricos: el mayor con radio *R* y el menor con radio *r*.



$$A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

h. En geometría, la fórmula de Herón, relaciona el área de un triángulo en términos de las longitudes de sus lados *a*, *b* y *c*.



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Para calcular el área de un polígono irregular es recomendable descomponer el polígono en otras figuras: triángulos, rectángulos, trapecios, entre otros; encontrar las áreas respectivas y finalmente sumar los resultados encontrados. Comúnmente es necesario aplicar la fórmula de Herón para calcular el área de los triángulos resultantes.

i. La longitud de arco es la medida de la distancia o "camino recorrido" a lo largo de una curva o dimensión lineal. Para calcularla es necesario conocer la medida del arco en grados y el radio de la circunferencia. La relación entre estos elementos se expresa como:

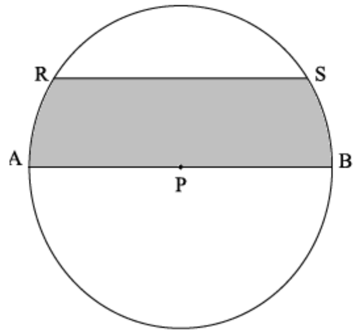
$$L = \frac{\pi\ r \cdot n°}{180°}$$, donde n°: medida del arco en grados y r: radio.

Resumen área de figuras planas

Áreas de figuras planas		
NOMBRE	**ÁREA**	**SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES**
Paralelogramo	$b \cdot h$	$b: base$ $h: altura$
Rectángulo	$b \cdot h$	$b: base$ $h: altura$
Cuadrado	L^2	$L: lado$
Rombo	$\frac{D \cdot d}{2}$	$D: diagonal\ mayor$ $d: diagonal\ menor$
Triángulo	$\frac{b \cdot h}{2}$	$b: base$ $h: altura$
Triángulo equilátero	$\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$	$L: lado$
Trapecio	$\frac{(B+b)h}{2}$	$B: base\ mayor$ $b: base\ menor$ $h: altura$
Polígono regular	$\frac{P \cdot a}{2}$, donde $P = nL$	$P: perímetro; a: apotema$ $n: número\ de\ lados; L: lado$
Círculo	πr^2	$r: radio$

Ejercicios

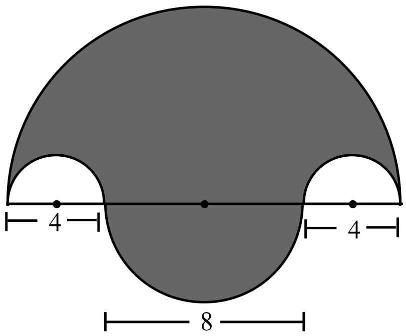
1. Considere la figura adjunta donde P es el centro del círculo.



De acuerdo con los datos de la figura, si $A-P-B$, $RS=10\sqrt{2}\ ul$ y $m\measuredangle RPS=90$; calcule el área de la región destacada con gris, en unidades lineales cuadradas.

R/ $25\pi + 50$

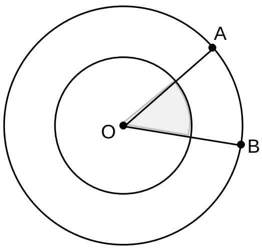
2. Considere la figura adjunta, formada por cuatro semicircunferencias



De acuerdo con los datos de la figura, determine el área en unidades cuadradas, de la región destacada con gris.

R/ 36π

3. Considere la figura adjunta, en donde se presentan dos circunferencias concéntricas de centro O.



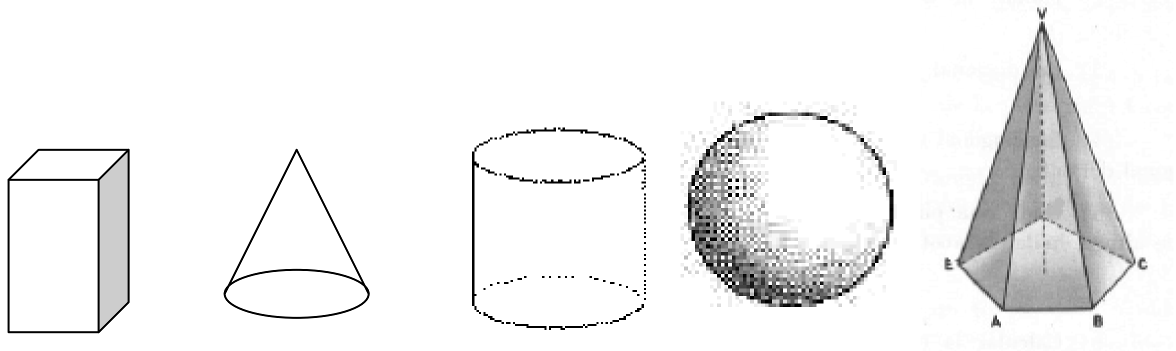
Calcule la longitud, en centímetros, de la circunferencia menor, sabiendo que la longitud de la circunferencia mayor es 20π cm, el arco AB mide 45º y el área de la región sombreada es $\frac{9\pi}{2}$ cm^2.

R/ 12π

IV. Estereometría

El mundo bidimensional de la geometría plana no es suficiente para explicar el mundo en que vivimos, pues éste posee tres dimensiones: largo, ancho y alto. Para explicar este mundo tridimensional se ha desarrollado la rama de la matemática denominada geometría del espacio o estereometría.

La mayor parte del mundo tridimensional se basa en cinco figuras sólidas familiares: cajas, pirámides, conos, bolas y envases. En geometría del espacio se les conoce con los nombres respectivos de: prisma, pirámides, conos, esferas y cilindros (ver Figuras adjuntas).



PRISMA CONO CILINDRO ESFERA PIRÁMIDE

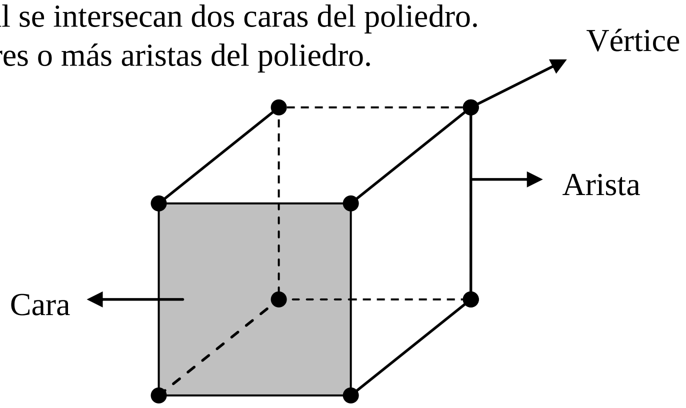
Se puede observar a simple vista que el prisma y la pirámide están limitados por superficies planas; la esfera está limitada por una sola superficie curva y el cono y el cilindro están limitados por superficies planas y curvas.

A los cuerpos geométricos que están limitados completamente por superficies planas se les llama poliedros y a los que están limitados por superficies curvas o por superficies planas y curvas se les llama cuerpos redondos.

1. Conceptos básicos:

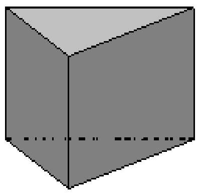
a. Poliedros:

- **Cara**: cada una de las superficies planas que limitan al poliedro.
- **Arista**: es el segmento de recta en el cual se intersecan dos caras del poliedro.
- **Vértice**: es el punto de intersección de tres o más aristas del poliedro.



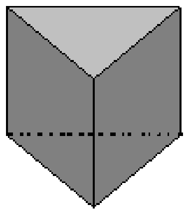
b. **Prisma recto:** las caras llamadas bases son paralelas entre sí y son perpendiculares a la altura; también, las caras laterales son perpendiculares a las bases. Los prismas rectos son poliedros limitados por dos polígonos paralelos y congruentes llamados bases y por caras laterales que son rectángulos perpendiculares a las bases. Dependiendo del número de lados que posean las bases de un prisma, así será su nombre. Por ejemplo si la base es un triángulo, se llama prisma triangular; si la base es un rectángulo prima rectangular, etc.

PRISMA TRIANGULAR:
las bases son triángulos.



IRREGULAR

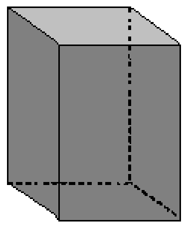
BASES
triángulos
escalenos



REGULAR

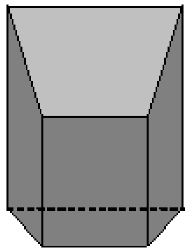
BASES
triángulos
equiláteros

PRISMA CUADRANGULAR:
las bases son cuadriláteros.



REGULAR

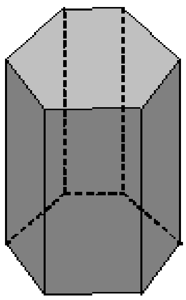
BASES
cuadrados



IRREGULAR

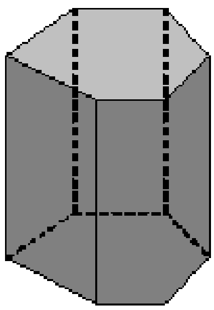
BASES
cuadriláteros
irregulares

PRISMA HEXAGONAL:
Las bases son hexágonos



REGULAR

BASES
hexágonos
regulares

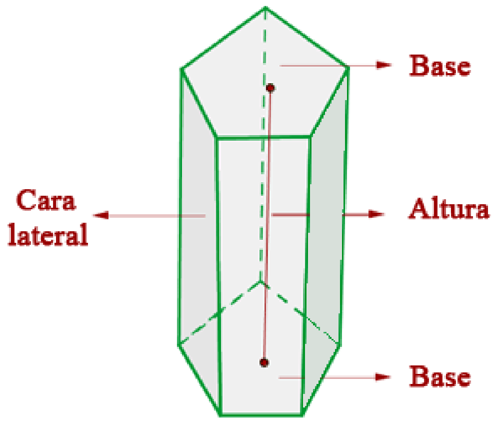


IRREGULAR

BASES
hexágonos
irregulares

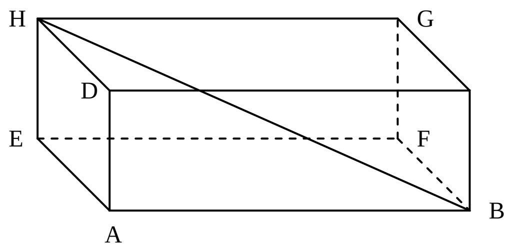
Dos elementos de suma importancia en los prismas son la altura y la diagonal.

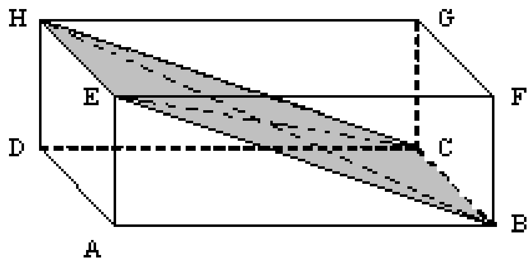
- **Altura**: es el segmento perpendicular, que va de base a base.



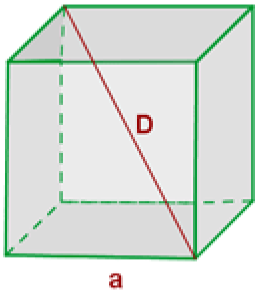
- **Diagonal**: es el segmento cuyos extremos son vértices opuestos de dos caras opuestas.

El plano determinado por dos diagonales de un prisma, se le llama plano diagonal.





c. **El Cubo:** Un caso particular de poliedro es el cubo, cuyas caras son seis regiones cuadrangulares congruentes. Asimismo puede indicarse que es un ejemplo de prisma recto con la particularidad de sus caras congruentes.

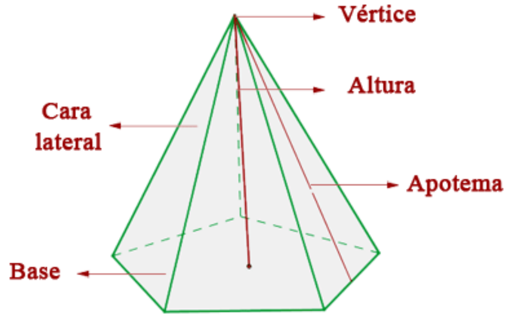


Nota Importante:

La medida de la diagonal de un cubo de arista a es $d = a\sqrt{3}$.

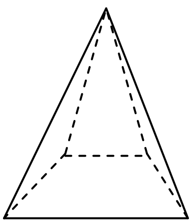
d. **Pirámide recta**: son poliedros cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos que concurren en un punto llamado vértice o cúspide de la pirámide.

- **Altura de la pirámide**: es el segmento perpendicular que va desde la cúspide de la pirámide hasta la base.
- **Apotema de la pirámide**: se llama así a las alturas respectivas de los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide.

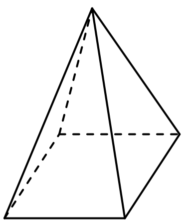


Dependiendo del número de lados que posean las bases de una pirámide, así será su nombre. Por ejemplo:

PIRÁMIDE CUADRANGULAR:
la base es un cuadrilátero

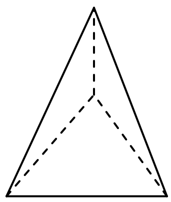


Irregular

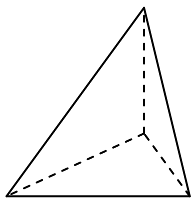


Regular

PIRÁMIDE TRIÁNGULAR:
la base es un triángulo

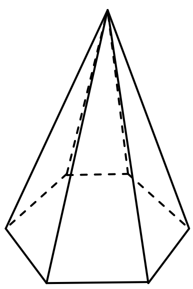


Regular

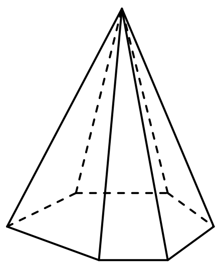


Irregular

PIRÁMIDE HEXÁGONAL:
la base es un hexágono



Regular



Irregular

Nota Importante:

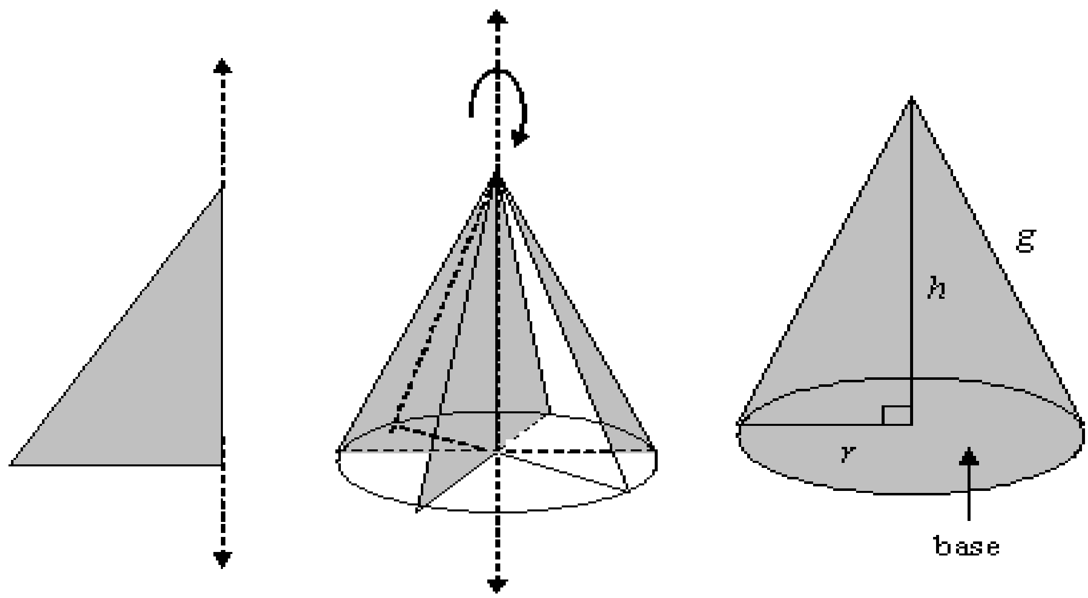
Fórmula de Euler:

El número de caras c, arista a y vértice v, de cualquier poliedro se relaciona mediante la siguiente fórmula: $c+v=a+2$

2. Cuerpos redondos

a. Cono circular recto: es un sólido cuya base es un círculo y cuya superficie lateral es una curva que termina en punto llamado vértice del cono.

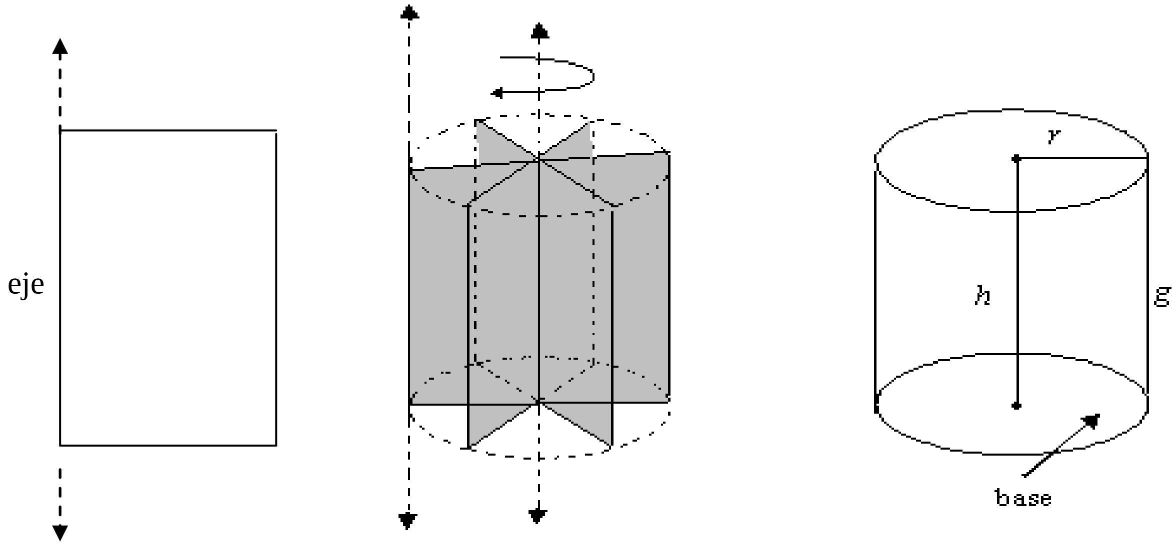
- **Altura del cono**: es el segmento perpendicular que va desde el vértice del cono hasta el centro de la base. El cono se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos; este cateto llamado eje de rotación viene a ser la altura h del cono y el otro cateto viene a ser el radio r de la base circular, la hipotenusa de ese triángulo rectángulo, llamada generatriz g, va pasando sucesivamente por los puntos de la circunferencia y es la que engendra la superficie cónica (ver figura adjunta).



b. Cilindro circular recto: es un sólido que posee dos bases circulares congruentes y paralelas y una superficie curva.

- **Altura del cilindro**: segmento perpendicular que va de base a base.

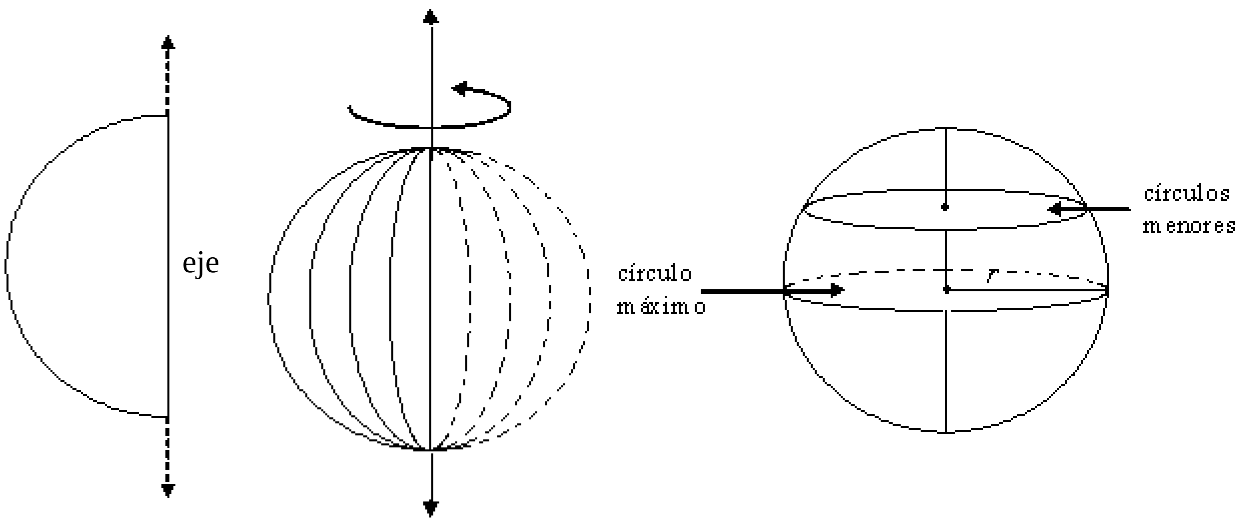
- **Radio del cilindro**: es el radio de las bases del cilindro.



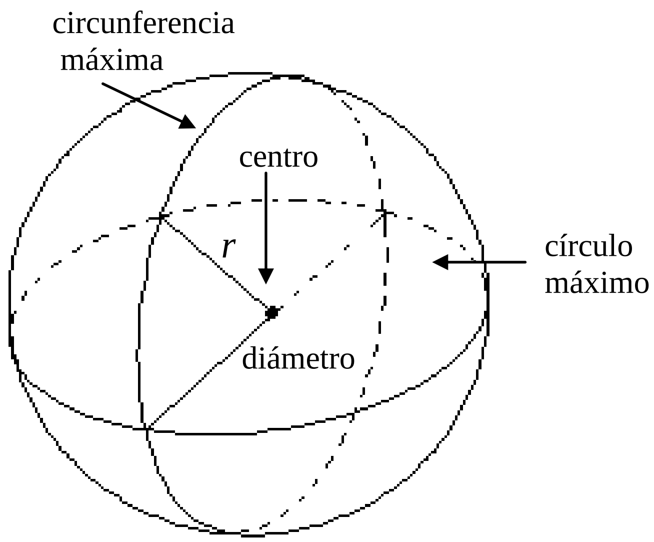
Nota Importante:

El volumen de un cono es un tercio del volumen del cilindro que tenga la misma base y la misma altura.

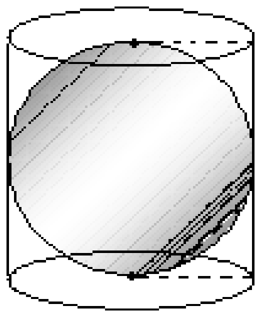
c. Esfera: se puede considerar engendrada por el giro completo de una semicircunferencia alrededor de su diámetro como eje. El extremo exterior del radio perpendicular al eje (diámetro) engendra lo que se llama una circunferencia máxima. Los extremos exteriores de cualquier cuerda perpendicular al eje, engendra circunferencias menores.



Una esfera es un sólido cerrado, delimitado por una superficie en la que todos los puntos se encuentran equidistantes de un punto central llamado centro.



La razón entre el volumen de la esfera y el cilindro circunscrito a ésta es de $\frac{2}{3}$.



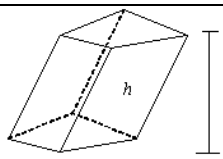
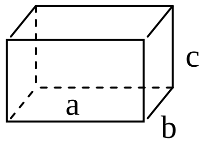
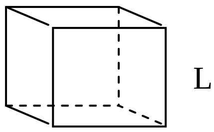
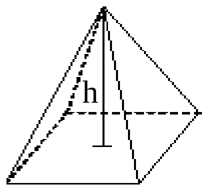
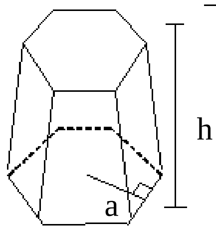
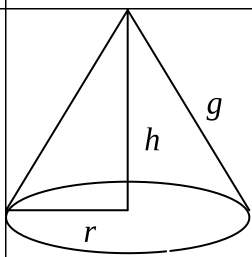
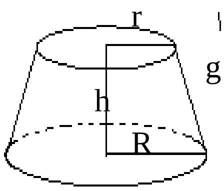
3. Unidad de medida

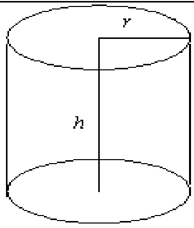
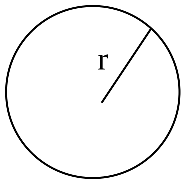
Así como se han definido a través de la historia diferentes unidades para medir longitudes y áreas, ha sido necesario también contar con una unidad de medida para el volumen.

Un cubo unitario, es decir un cubo en el cual la arista mida una unidad lineal, fue considerado como la unidad más adecuada para medir volúmenes. Si la unidad de longitud es la pulgada, entonces este cubo tendría un volumen de 1 pulgada cúbica, si en cambio la arista mide 1 centímetro entonces el volumen del cubo unitario sería un centímetro cúbico y así sucesivamente.

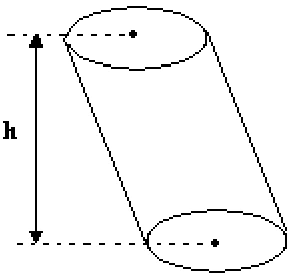
En el caso del Sistema Internacional de Medidas, para medir el volumen, se ha elegido el metro cúbico, el cual se define como el volumen de un cubo cuyas aristas miden 1 metro de longitud.

Resumen fórmulas de área y volúmenes

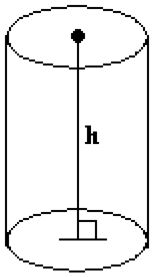
FÓRMULAS DE ÁREAS DE SUPERFICIES Y VOLÚMENES DE CUERPOS SÓLIDOS				
CUERPO	**ÁREA TOTAL**	**VOLUMEN**	**DIBUJO**	**VARIABLES**
Prisma	Suma de las áreas, laterales y basales	$A_B \cdot h$		$A_B: \text{área base}$ $h: \text{altura}$
Paralelepípedo rectángulo	$2(ab+bc+ac)$	abc		a,b: dim. *base* $c: \text{altura}$
Cubo	$6L^2$	L^3		$L: \text{arista}$
Pirámide	Suma de las áreas, laterales y basales	$\frac{1}{3}A_B \cdot h$		$A_B: \text{área base}$ $h: \text{altura}$
Tronco de pirámide regular	$\frac{1}{2}(P+P')a+B+B'$	$\frac{1}{3}h\left(B+B'+\sqrt{B\cdot B'}\right)$		$P,P': \text{perí. base}$ $B,B': \text{áreas base}$ $a: \text{apotema}$ $h: \text{altura}$
Cono circular recto	$\pi r(g+r)$ $\pi r\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$		$r: \text{radio}$ $g: \text{generatríz}$ $h: \text{altura}$
Cono truncado recto	$\pi\left(R^2+r^2+(R+r)g\right)$ $g=\sqrt{h^2+(R-r)^2}$	$\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$		$R,r: \text{radio}$ $h: \text{altura}$ $g: \text{generatríz}$

FÓRMULAS DE ÁREAS DE SUPERFICIES Y VOLÚMENES DE CUERPOS SÓLIDOS				
CUERPO	**ÁREA TOTAL**	**VOLUMEN**	**DIBUJO**	**VARIABLES**
Cilindro circular recto	$2\pi r\left(h+r\right)$	$\pi r^2 h$		$r:radio\,basal$ $h:altura$ $g:generatríz$
Esfera	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$		$r:radio\ esfera$

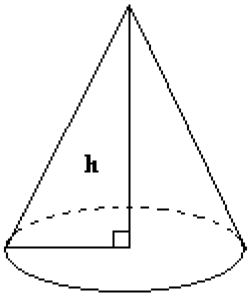
Algunos cuerpos sólidos y sus elementos:



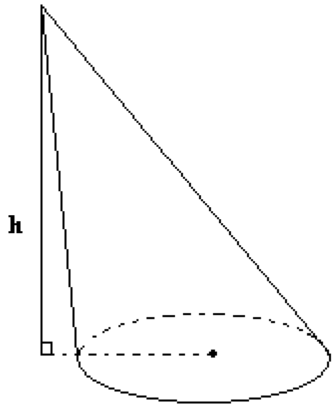
Cilindro oblicuo



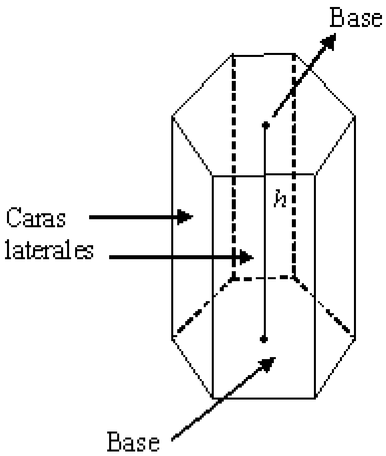
Cilindro recto



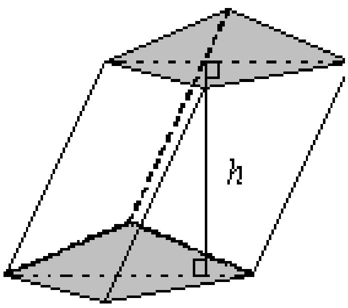
Cono circular recto



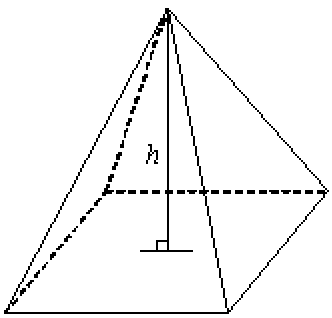
Cono circular oblicuo



Prisma recto



Prisma oblicuo



Pirámide recta

Ejercicios

1. La altura de un prisma es $12\,\text{cm}$ y la base es un rectángulo que mide $6\,\text{cm}$ de largo y de $3\,\text{cm}$ ancho. Se desea modificar dicho prisma de manera que el volumen sea el mismo pero que la altura sea la mitad de la anterior. Si se mantiene el ancho de la base, ¿cuál es la medida, en centímetros, del largo?

   R/ 12

2. Calcule el área lateral de una pirámide cuadrangular sabiendo que su área basal es $400\,\text{cm}^2$ y la altura mide $25\,\text{cm}$.

   R/ $200\sqrt{29}$

3. El área total de un cilindro circular recto es $144\pi\ \text{cm}^2$. Si el radio de la base es congruente con la altura del cilindro, entonces calcule la medida de dicho radio, y además determine el volumen del cilindro.

   R/ $216\,\pi\ cm^3$

4. Determine el valor aproximado del radio de la base de un cono cuyo volumen es igual a $196\pi\,\text{cm}^3$ y su altura mide 12 cm.

   R/ 7cm

5. El área total de un cilindro circular recto es $144\ \text{cm}^2$. Si el radio de la base es congruente con la altura del cilindro, determine la medida del radio del cilindro, en centímetros.

   R/ $\dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$

6. Determine la cantidad de material utilizado en la construcción de un recipiente sin tapa, con forma de cilindro circular recto y cuya profundidad es $12\,\text{dm}$. Además, considere que $150\pi\ \text{dm}^3$ de líquido ocupan la mitad de la capacidad de dicho recipiente.

   R/ *Se necesita $145\pi dm^2$ de material para construir el recipiente.*

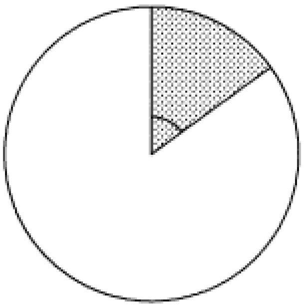
7. Si el volumen de una esfera es $8\,\text{cm}^3$ y el volumen de un cubo también es $8\,\text{cm}^3$, entonces se puede afirmar con certeza que el radio de la esfera es

   a) igual al lado del cubo.
   b) mayor que el lado del cubo.
   c) menor que el lado del cubo.
   d) el doble que el lado del cubo.

   R/ C

Ejercicios Generales

1. Me comí una rebanada de un pastel redondo que representaba el 15% del pastel, como indica la figura. ¿Cuál es el ángulo que abarca la rebanada del pastel?

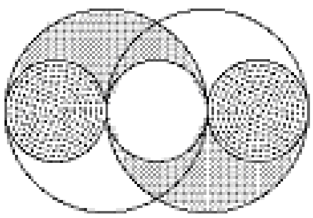


a) 15°
b) 36°
c) 45°
d) 54°
e) 60°

2. Se tienen dos círculos con centro en el mismo punto, pero cuyos perímetros difieren en 1 cm. ¿Cuál es la diferencia, en centímetros, entre sus radios?

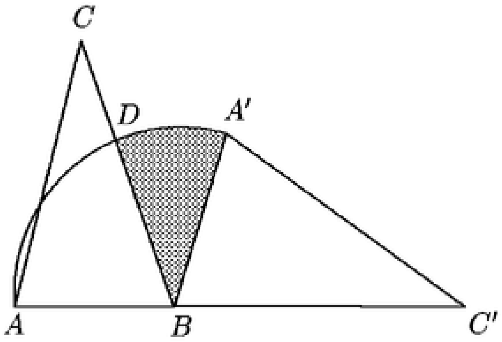
a) $\frac{1}{2\pi}$
b) $\frac{1}{4\pi}$
c) π
d) 2π
e) 4π

3. En la figura, los círculos pequeños tienen radio 1 y los círculos grandes tienen radio 2. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



a) π
b) 2π
c) 4π
d) 6π
e) 8π

4. En el triángulo ABC, AB = 1, BC = 2 y el ángulo $\measuredangle$ ABC es de 72^{o}. Se rota el triángulo ABC en el sentido de las manecillas del reloj fijando el vértice B, obteniéndose el triángulo A'BC'. Si A,B,C' son colineales y el arco AA' es el descrito por A durante la rotación, ¿cuánto vale el área sombreada?



a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{10}$

c) $\frac{3\pi}{8}$

d) $1-\frac{\pi}{2}$

e) $\pi-\frac{3}{2}$

5. Una flor se ha dibujado dentro de un círculo manteniendo la misma apertura del compás, como se muestra en la figura. Si el perímetro de la flor es 2, ¿cuál es el radio del círculo?

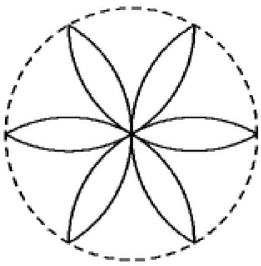
a) $\frac{1}{2\pi}$

b) $\frac{1}{4\pi}$

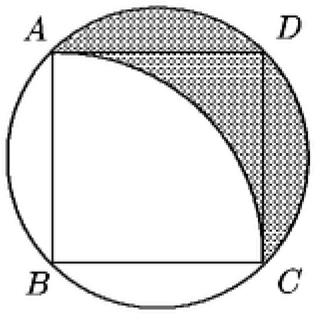
c) $\frac{1}{6}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{8}$



6. En la figura, cada lado del cuadrado mide 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



a) $\frac{\pi}{2}$

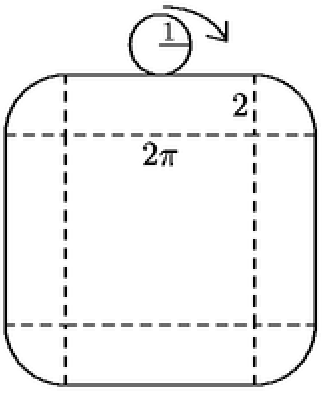
b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $1-\frac{\pi}{4}$

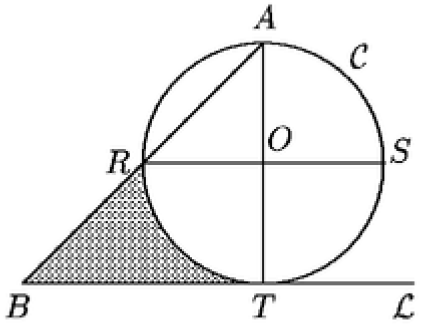
e) $1-\frac{\pi}{2}$

7. Un cuadrado de lado 2π se "redondea" añadiéndole un marco de 2 cm de ancho (en las esquinas se han puesto cuartos de círculo). Una rueda de radio 1 cm se desplaza a lo largo del cuadrado redondeado (siempre tocándolo). ¿Cuántas vueltas completas dará la rueda alrededor de sí misma antes de completar una vuelta alrededor del cuadrado redondeado?



a) 3
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

8. El círculo $\mathcal{C}$ de la figura tiene centro O y su diámetro mide 3. Los segmentos AT y RS son diámetros perpendiculares del círculo. La recta $\mathcal{L}$ es tangente al círculo en el punto T; B es la intersección de la recta $\mathcal{L}$ con la recta AR. Calcular el área de la región sombreada (delimitada por los segmentos BR y BT y el arco de círculo de RT.)



a) $\frac{2\pi}{3}$

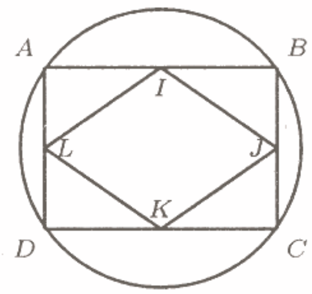
b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $9-\frac{\pi}{16}$

d) $\frac{3\pi}{2}-\frac{9}{16}$

e) $\frac{27}{8}-\frac{9\pi}{16}$

9. En un círculo de radio 3 está inscrito un rectángulo ABCD. Sean I, J, K y L los puntos medios de los lados de ABCD, como se indica en la figura. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero IJKL?

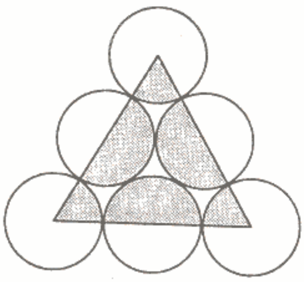


a) 6
b) 9
c) 12
d) $4\sqrt{3}$
e) depende del rectángulo

10. Si se dibujan un círculo y un cuadrado en la misma hoja, ¿cuál es el máximo número de puntos comunes que pueden tener?

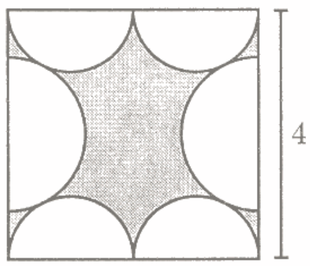
a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 16

11. En la siguiente figura los círculos son tangentes (se tocan en un sólo punto), todos los círculos son del mismo tamaño y tienen radio igual a 2, ¿cuál es el área de la región sombreada?



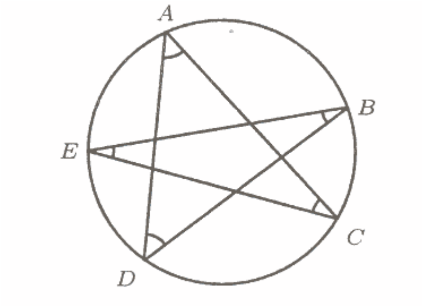
a) 2π
b) 4π
c) 6π
d) 8π
e) 10π

12. En la figura los semicírculos son tangentes entre sí. Si A es el área del cuadrado y B es la suma de las áreas de los 6 semicírculos, ¿Cuánto vale A – B?



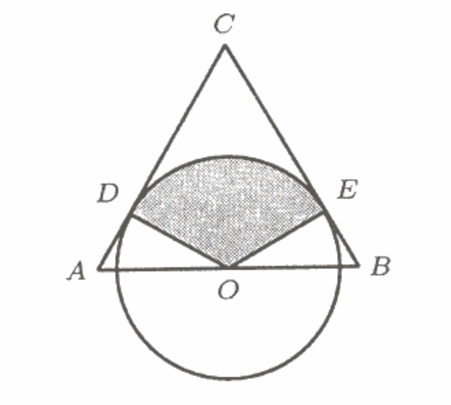
a) 8
b) $16 - 3\pi$
c) $16 - 4\pi$
d) $16- 8\pi + 2\sqrt{5}\pi$
e) $16 - 4\pi + \sqrt{5}\pi$

13. Los puntos A, B, C, D y E son puntos de una circunferencia, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores < A, < B, < C, < D y < E?



a) 90º
b) 180º
c) 225º
d) 270º
e) 360º

14. Sea ABC un triángulo equilátero. Una circunferencia es tangente a los lados AC y BC en los puntos D y E respectivamente, y tiene su centro *O* en AB. Si AB = 2, ¿cuánto vale el área del sector DOE?



a) $\frac{\pi}{4}$

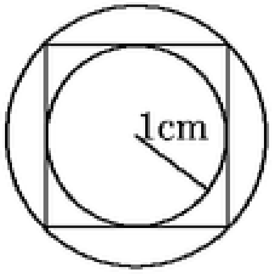
b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{2\pi}{3}$

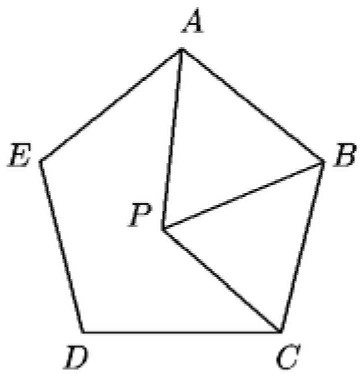
e) π

15. Un círculo cuyo radio mide 1 cm está inscrito en un cuadrado, y éste a su vez está inscrito en otro círculo, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide el radio de éste último círculo?



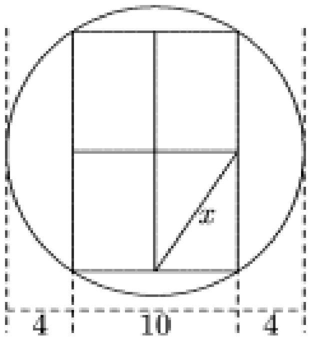
a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. En la figura, ABCDE representa un pentágono regular (de 1 cm de lado) y ABP es un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo <BCP?



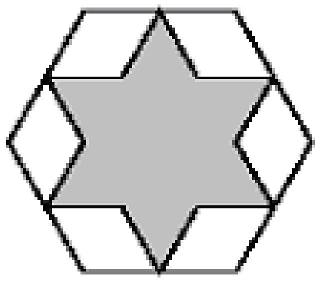
a) 45º
b) 54º
c) 60º
d) 66º
e) 72º

17. ¿Cuál es la longitud de x en la figura?



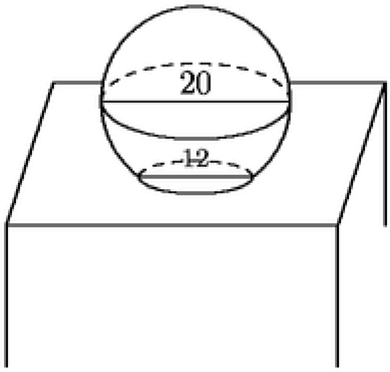
a) 9
b) 12
c) 18
d) $4\sqrt{10}$
e) $\sqrt{116}$

18. La estrella de la figura toca cada lado del hexágono regular en el punto medio (los lados de la estrella son paralelos a los del hexágono). Si el área de la estrella es 6, ¿cuál es el área del hexágono?



a) 8
b) 9
c) 12
d) 15
e) 18

19. Una mesa tiene un agujero circular con un diámetro de 12 cm. Sobre el agujero hay una esfera de diámetro 20 cm. Si la mesa tiene 30 cm de altura, ¿cuál es la distancia, en centímetros, desde el punto más alto de la esfera hasta el piso?



a) 40
b) 42
c) 45
d) 48
e) 50

Solucionario

Pregunta	Respuesta
1	**D**
2	**A**
3	**C**
4	**B**
5	**A**
6	**C**
7	**B**
8	**E**
9	**C**
10	**B**
11	**D**
12	**B**
13	**E**
14	**A**
15	**B**
16	**D**
17	**A**
18	**C**
19	**D**

Referencias Bibliográficas

Blanco, R. y Sancho, L. (2009). *Matemática para la enseñanza media*. Ciclo Diversificado. Teoría y Ejercicios. San José, Costa Rica: SIEDIN, Universidad de Costa Rica.

Jiménez, R. (2005). *Geometría y trigonometría. 2° edición*. San José, Costa Rica: AMP.

Meneses, R. (2004). *Matemática practicas para bachillerato*. San José, Costa Rica: Editorial Pearson.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas. (2007, marzo 23). Problemas introductorios [Página Web]. Recuperado de http://ichi.fismat.umich.mx/recursos/prob15.php

Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Delegación Yucatán (2007, marzo 27). Curso-Taller Básico: Polígonos y Circunferencia [Documento posteado en la página web]. Recuperado de www.uady.mx/~matemati/omm/.../poligonosycircunferencia.doc