Unidad Didáctica IV: Geometría Analítica

El estudiante al terminar la unidad didáctica de Geometría Analítica deberá dominar los siguientes contenidos:

1. El plano cartesiano.
2. Cálculo de la distancia entre dos puntos y de las coordenadas del punto medio de un segmento, distancia de un punto a una recta.
3. Ecuaciones de la recta, la forma general y la forma $y = mx + b$. Representación gráfica de rectas. Paralelismo y perpendicularidad de rectas.
4. Ecuación de la parábola con eje de simetría perpendicular al eje X. Representación gráfica de parábolas (los posibles casos de la parábola) de acuerdo con el coeficiente principal del polinomio correspondiente.
5. Cálculo de las coordenadas de los puntos de intersección entre rectas, entre rectas y parábolas y entre parábolas.
6. Ecuación de la circunferencia.
7. Problemas de aplicación.

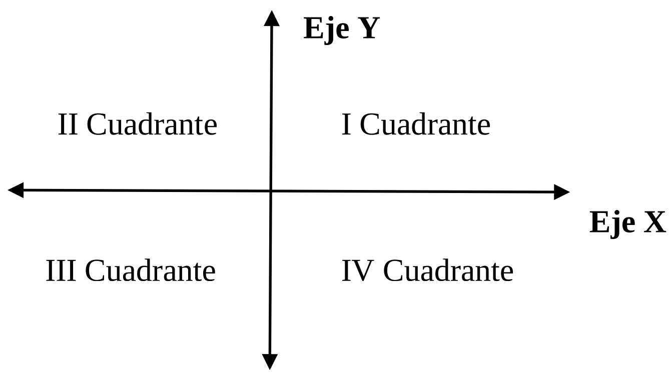
Al terminar de estudiar este tema con sus ejercicios y problemas, el estudiante debe ser capaz de:

1. Calcular la distancia entre dos puntos, entre un punto y una recta y las coordenadas del punto medio de un segmento.
2. Representar de manera gráfica y analítica una recta y una parábola.
3. Calcular las coordenadas de los puntos de intersección entre rectas, entre rectas y parábolas y entre parábolas.
4. Comprender y aplicar el concepto de circunferencia, así como del centro y el radio de esta desde el punto de vista analítico.
5. Resolver problemas diversos donde se apliquen los conceptos anteriores.

1. El plano cartesiano $\left(\mathbb{R}^2\right)$

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares entre sí que se intersecan en el origen de cada una; la recta horizontal se llama eje de las abscisas (o eje X) y la recta vertical eje de las ordenadas (o eje Y); juntas reciben el nombre de ejes de coordenadas y su cero común se llama punto origen.

Al igual que utilizamos la recta numérica para representar al conjunto de los números reales, el plano cartesiano se utiliza para representar las parejas ordenadas de números reales. Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro semiplanos llamados cuadrantes; se enumeran de I a IV en el sentido contrario al que giran las manecillas de un reloj iniciando en el cuadrante superior derecho. Los puntos sobre los ejes de coordenadas **no** se consideran parte de algún cuadrante.

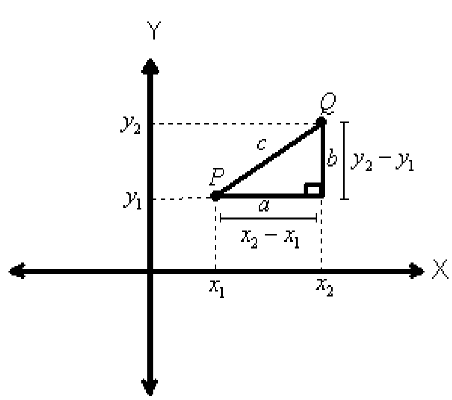


Este sistema de coordenadas permite asociar un punto en el plano con cada pareja ordenada $\left(x,\ y\right)$. El primer elemento de la pareja ordenada se llama abscisa y el segundo ordenada o también coordenada x y coordenada y, respectivamente.

2. Distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento

2.1 Distancia entre dos puntos

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos del plano cartesiano. La distancia entre los puntos P y Q se denota y se define por: $d = d\left(P,\ Q\right) = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Su explicación radica en una sencilla aplicación del Teorema de Pitágoras. Veamos:

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left[d\left(P, Q\right)\right]^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$\Rightarrow\ d\left(P, Q\right) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

2.2 Punto medio de un segmento

Consideremos los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ lo denotaremos por $M_{\overline{PQ}}$ y lo definimos por el punto cuyas coordenadas cartesianas son:

$$M_{\overline{PQ}} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \ \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplos

1. Ubique, en el plano cartesiano y encuentre la distancia que existe entre los puntos $(4, \ -1)$ y $(2, \ 0)$. R/ $d = \sqrt{5}$

2. Ubique en el plano cartesiano y encuentre el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $P(4, \ -1)$ y $Q(2, \ 0)$. R/ $M_{\overline{PQ}} = \left(3, \ -\frac{1}{2}\right)$

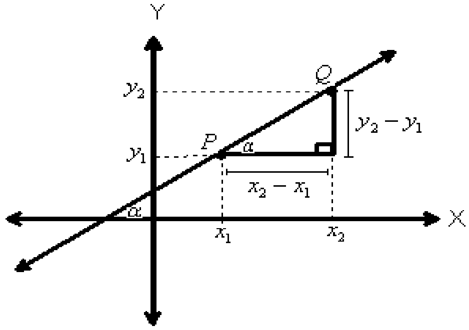
3. Ecuación de la recta y su representación gráfica

3.1 Pendiente *m* de una recta

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos de una recta, entonces la pendiente de la recta se define por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Nota: la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal. La siguiente figura ilustra esa situación.



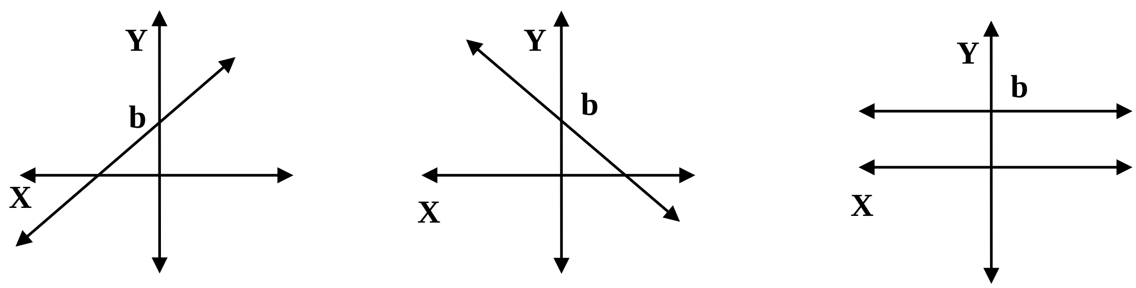
$$m = \tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3.2 Forma pendiente-intersección de una recta

Si m es la pendiente de una recta y b es la ordenada del punto de intersección de dicha recta con el eje Y; y si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta, entonces la ecuación de la recta se puede expresar como:

$$y = mx + b$$

La siguiente figura muestra como se representan las rectas, dependiendo del valor que tome su pendiente.



m > 0 Crece **m < 0** Decrece **m = 0** Constante

Nota: para calcular el valor de b en la ecuación anterior, basta con resolver la siguiente expresión:

$$b = y - mx.$$

3.3 Forma punto-pendiente

Si $P(x_1, y_1)$ es un punto de una recta y m es su pendiente; entonces la ecuación de la recta se puede expresar como $y - y_1 = m(x - x_1)$

3.4 Forma general de la recta (también conocida como ecuación lineal en x, y)

Si a, b y c son números reales tales que a y b son no nulos simultáneamente; entonces se cumple que la gráfica de la ecuación $ax + by + c = 0$ es una recta y viceversa; es decir, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

La forma general de una recta viene dada por la ecuación lineal $ax+by+c=0$.

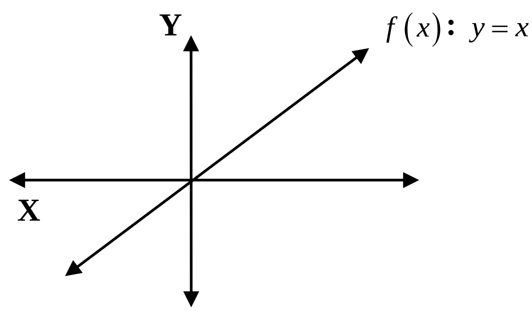
Casos particulares

a) Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$, entonces se puede representar la ecuación en la forma pendiente-intersección, como $y=\left(-\dfrac{a}{b}\right)x+\left(-\dfrac{c}{b}\right)$.

En este caso la pendiente de la recta es $\left(-\dfrac{a}{b}\right)$ y la intersección con el eje de las ordenadas es $\left(-\dfrac{c}{b}\right)$.

Si $\left(-\dfrac{a}{b}\right)>0$ entonces la gráfica es creciente y si $\left(-\dfrac{a}{b}\right)<0$ entonces la gráfica es decreciente.

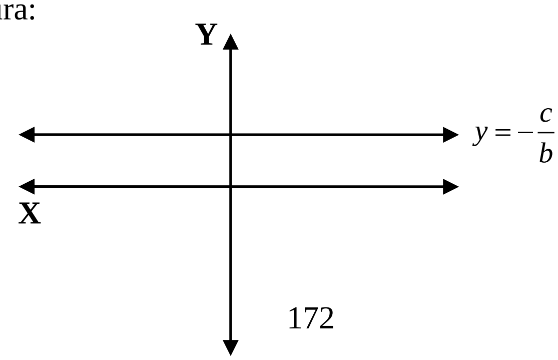
Además, si $c=0$ y $-a=b$ entonces la ecuación lineal representa a la función identidad cuya gráfica es la siguiente.



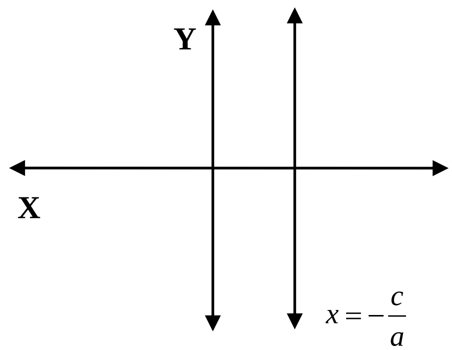
b) Si $\mathrm{a}=0$ y $\mathrm{b}\neq 0$ entonces la ecuación de la recta es $y=-\dfrac{c}{b}$, $x\in\mathbb{R}$.

Observe que en este caso, la gráfica obedece a una función constante, puesto que la pendiente es cero. Toda función constante es representada por una recta paralela al eje de las abscisas (eje X).

Veamos la siguiente figura:



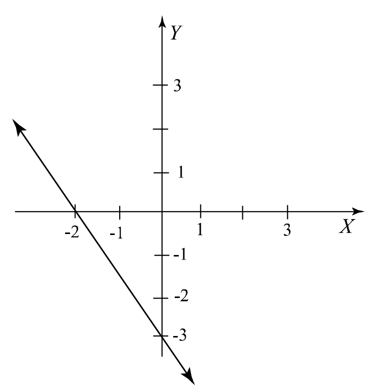
c) Si a $\neq 0$ y $b = 0$ entonces la ecuación de la recta es $x = -\dfrac{c}{a}$, $y \in \mathbb{R}$



Observe que en este caso, la ecuación de la recta no corresponde a una función; para este tipo de rectas la pendiente no está definida y su gráfica es una recta paralela al eje de las ordenadas (eje Y).

3.5 Representación gráfica de la ecuación de una recta

Puesto que la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para graficar basta encontrar dos puntos cualesquiera de la recta; aunque muchas veces resulta más fácil obtener las intersecciones con los ejes de coordenadas y luego trazar una línea que pase por esos dos puntos.



Intersecciones de una recta con los ejes de coordenadas

Si la ecuación de la recta está expresada en su forma pendiente-intersección; es decir, $y = mx + b$ entonces los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas son los siguientes.

- $(0, y) = (0, b)$ es el punto de intersección de una recta con el eje de las ordenadas.

- $(x, 0) = \left(-\dfrac{b}{m}, 0\right)$ es el punto de intersección de una recta con el eje de las abscisas.

Ejemplo

a) Encuentre la ecuación de recta l_1 que pasa por los puntos $(-3,\ 1)$ y $(5,\ 2)$ en su forma pendiente-intersección, punto-pendiente y en la forma general.

R/ Forma pendiente intersección: $y = \dfrac{x+11}{8}$

Forma punto-pendiente: $y-1 = \dfrac{1}{8}(x+3)$ ó $y-2 = \dfrac{1}{8}(x-5)$

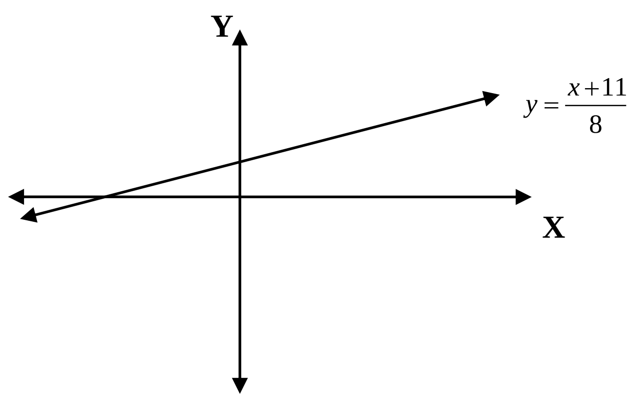
Forma general: $-x+8y-11=0$

b) Encuentre los puntos de intersección de la recta l_1 con los ejes de coordenadas.

R/ $X(-11, 0)$ y $Y\left(0, \dfrac{11}{8}\right)$

c) Grafique la recta l_1.

R/



3.6 Relación entre rectas de un mismo plano

Si se consideran dos rectas l_1 y l_2 en un mismo plano; entonces entre l_1 y l_2 se puede establecer una relación de acuerdo con la intersección que se dé entre ambas o con el ángulo que ellas determinan. Si la intersección entre las dos rectas es vacía se dice que son rectas **paralelas** y se denota por $l_1 \| l_2$; en caso contrario, se dice que son rectas **oblicuas** y la intersección es un único punto; si además, un par de rectas oblicuas forman ángulo recto se dice que son rectas **perpendiculares**; si este fuera el caso para l_1 y l_2 se denotaría por $l_1 \perp l_2$.

Toda recta cuya ecuación sea de la forma $y = k, \ \forall k, \ k \in \mathbb{R}$ (ie k constante), resulta ser paralela al eje de las abscisas; mientras que, toda recta cuya ecuación sea de la forma $x = k, \ \forall k, \ k \in \mathbb{R}$ es paralela al eje de las ordenadas.

Las rectas paralelas al eje de las abscisas son perpendiculares a las rectas paralelas al eje de las ordenadas; es decir, las rectas de la forma $y = k, \ \forall k, \ k \in \mathbb{R}$ son perpendiculares a las rectas de la forma $x = k, \ \forall k, \ k \in \mathbb{R}$, además, todas las rectas de la forma $x = k, \ \forall k, \ k \in \mathbb{R}$ son paralelas entre sí.

Si l_1 y l_2 no presentan ninguno de los casos anteriores (es decir, $y = k$ o $x = k, \ \forall k, \ k \in \mathbb{R}$) entonces se puede establecer una relación entre las pendientes de sus ecuaciones y las propiedades de paralelismo y perpendicularidad.

Si las ecuaciones en la forma pendiente-intersección de estas rectas son $l_1 : \ y = m_1 x + b_1$ y $l_2 : \ y = m_2 x + b_2$ entonces se cumple uno de los dos casos siguientes:

a) $l_1 \| l_2 \iff m_1 = m_2$

b) $l_1 \perp l_2 \iff m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ o $m_1 \cdot m_2 = -1$

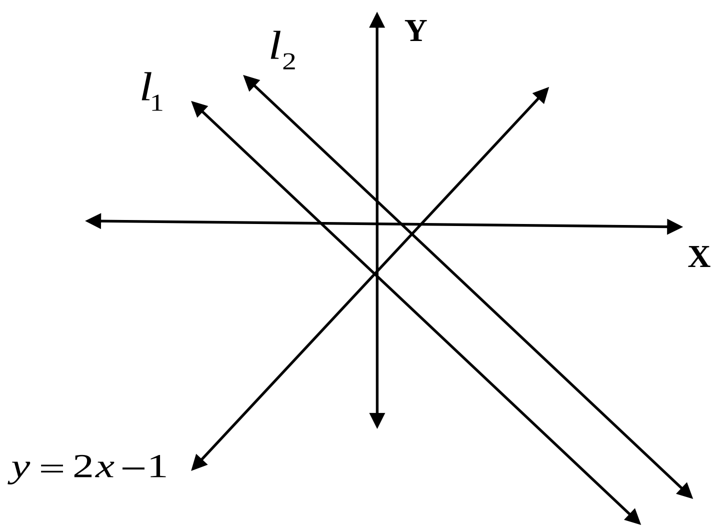
Ejemplos

1. Encuentre la ecuación de la recta l_1 que pasa por el punto $(0,\ -1)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x - 1$. Grafique ambas rectas en un mismo sistema de coordenadas.

   R/ $l_1 : y = \dfrac{-x}{2} - 1$ (Ver figura más adelante)

2. Encuentre la ecuación de la recta l_2 que pasa por el punto $\left(\dfrac{3}{2},\ 2\right)$ y es paralela a la recta l_1. Grafique la recta l_2 en el mismo sistema de coordenadas de la parte 1.

   R/ $l_2 : y = \dfrac{-x}{2} + \dfrac{11}{4}$ (Ver figura más adelante)



3. Encuentre la ecuación de la recta l_1 que pasa por los puntos $(3,\ -5)$ y $(1,\ -2)$.

   R/ $l_1 : y = \dfrac{-7x}{2} + \dfrac{11}{2}$

4. Encuentre la ecuación de la recta l_2 que es perpendicular a l_1 (ejemplo 3) y pasa por el punto $(1,\ -2)$.

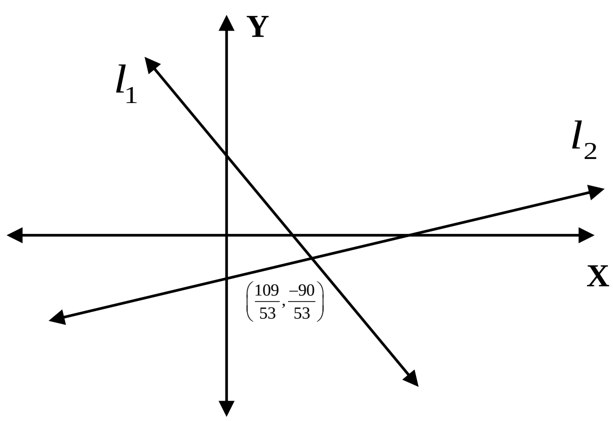
   R/ $l_2 : y = \dfrac{2x}{7} - \dfrac{16}{7}$

3.7 Punto de intersección de rectas oblicuas

En ciertas ocasiones interesa conocer el punto de intersección de rectas oblicuas (rectas que se intersecan). En estos casos lo más conveniente es expresar las ecuaciones de las rectas de interés en la forma pendiente-intersección y resolver el sistema de ecuaciones que se forma; el conjunto solución del sistema de ecuaciones resulta ser el punto de intersección de las rectas (más adelante se detallará este aspecto).

Ejemplo

Encuentre el punto de intersección de las rectas $l_1 : y = \dfrac{-7x}{2} + \dfrac{11}{2}$ y $l_2 : y = \dfrac{2x}{7} - \dfrac{16}{7}$. Grafique ambas rectas en un mismo sistema de coordenadas. R/ $\left(\dfrac{109}{53}, \dfrac{-90}{53}\right)$



3. 8 Distancia de un punto a una recta

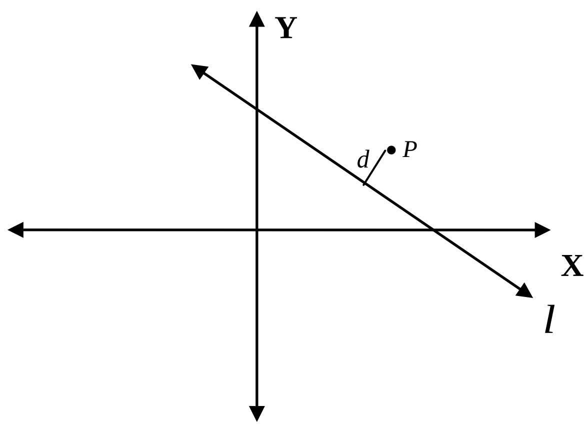
La distancia d entre un punto y una recta es la longitud del segmento que contiene en uno de sus extremos al punto dado; además, es perpendicular a la recta. Si el punto dado es $P(x_1, y_1)$ y la recta dada tiene por ecuación $y = mx + b$, entonces la distancia se calcula mediante la fórmula

$$d = \frac{|mx_1 + b - y_1|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Ejemplo

Ubique en el plano cartesiano y encuentre la distancia que hay del punto $P(2,\ 5)$ a la recta cuya ecuación es $l:\ y = -2x + 7$. Hágalo primero hallando el segmento que tiene en uno de sus extremos al punto P y es perpendicular a la recta l; luego encuentre el punto de intersección del segmento con la recta y llámelo Q y finalmente calcule la distancia que hay entre P y Q; además, compruebe el resultado con la fórmula anterior.

R/ $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



3.9 Distancia entre rectas paralelas

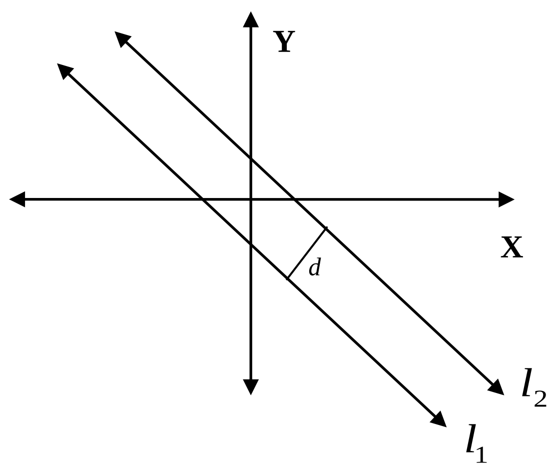
La distancia d entre dos rectas que son paralelas es la distancia que hay de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta. Si l_1 y l_2 son rectas paralelas cuyas ecuaciones son $l_1 : y = mx + b_1$ y $l_2 : y = mx + b_2$ entonces la distancia de l_1 *a* l_2 viene dada por la fórmula

$$d = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Ejemplo

Ubique en el plano cartesiano y encuentre la distancia que hay entre las rectas cuyas ecuaciones son $l_1 : x = -2 - 3y$ y $l_2 : 2x + 6y = 5$. Hágalo primero hallando la distancia que hay desde un punto cualquiera de una de las rectas hasta la otra; y luego compruebe el resultado con la fórmula anterior.

R/ $d = \dfrac{9\sqrt{10}}{20}$



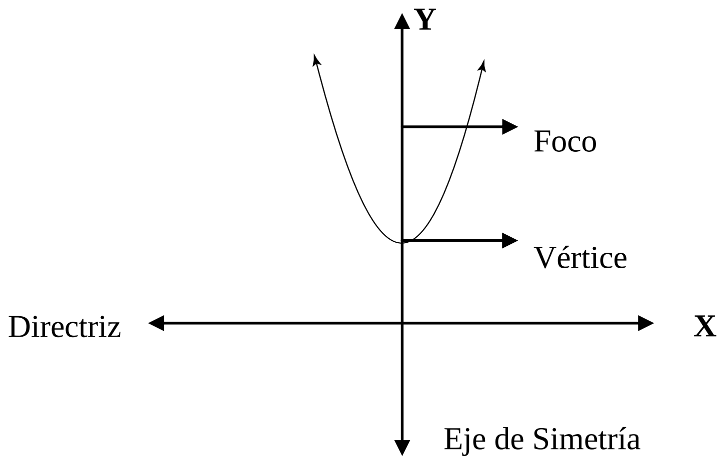
4. La Parábola y su representación gráfica

4.1 Definición de parábola

Una parábola es el conjunto de puntos en un plano cuya distancia a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija; el punto fijo se llama **foco** y la recta fija se llama **directriz**.

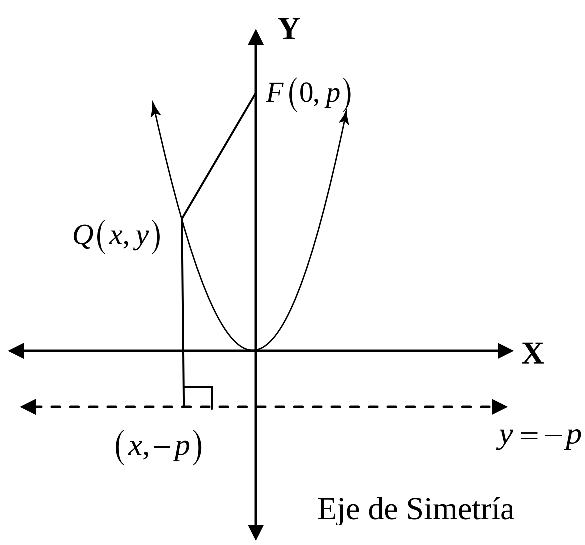
La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama **eje de simetría** y el punto donde la parábola interseca a su eje de simetría es el **vértice**.

En este curso se estudiará solamente las parábolas que tienen su eje de simetría perpendicular al eje de las abscisas.



4.2 Parábola cuyo vértice es el origen (0, 0)

Dado el foco y su directriz, elegimos un sistema de coordenadas de modo tal que la directriz sea horizontal y el origen esté a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Llamaremos p a la distancia entre el foco y el origen $(p > 0)$, de modo que la distancia entre el origen y la directriz también es p. Por lo tanto, las coordenadas del foco F son $(0, p)$ y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Por definición de parábola, si elegimos cualquier punto de la parábola, $Q(x, y)$, la distancia de ese punto $Q(x, y)$ a su foco $F(0, p)$ es igual a la distancia del punto $Q(x, y)$ al punto $(x, -p)$. (Observe que $(x, -p)$ es el punto que se utiliza para determinar la distancia perpendicular a la recta $y = -p$).



Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos lo siguiente.

$$
\begin{aligned}
& d\left((x,y),(0,p)\right) = d\left((x,y),(x,-p)\right) \\
& \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2} \\
& (x-0)^2+(y-p)^2 = (x-x)^2+(y+p)^2 \\
& x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2 \\
& x^2 = 4py
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación es la forma estándar de una parábola con foco $(0,p)$ y directriz $y=-p$ con $p>0$.

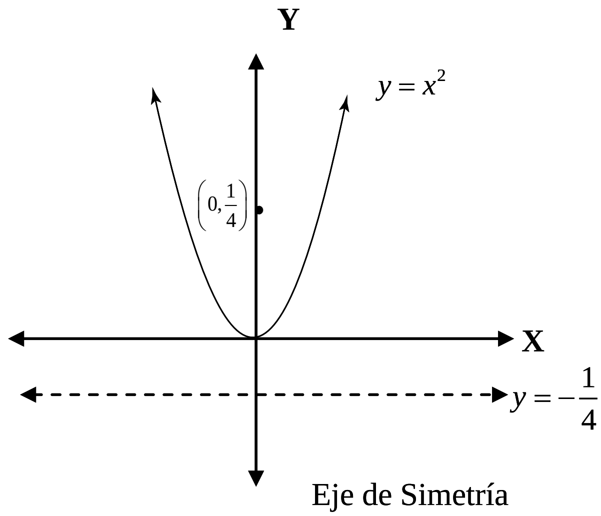
Nota:

> La dirección en la cual se abre la parábola depende del signo de p. Específicamente, si $p>0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p<0$, la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplos

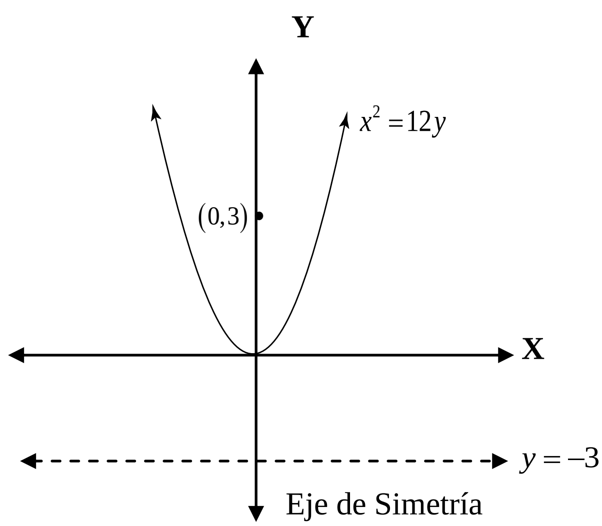
1. Determine el foco, vértice y directriz de la parábola $y=x^2$; además, grafique la curva.

R/ Puesto que la ecuación $y=x^2$ tiene la misma forma de la ecuación estándar de una parábola $\left(x^2=4py\right)$, identificamos que el vértice es el origen, $p=\frac{1}{4}$, el foco es $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y=-\frac{1}{4}$.

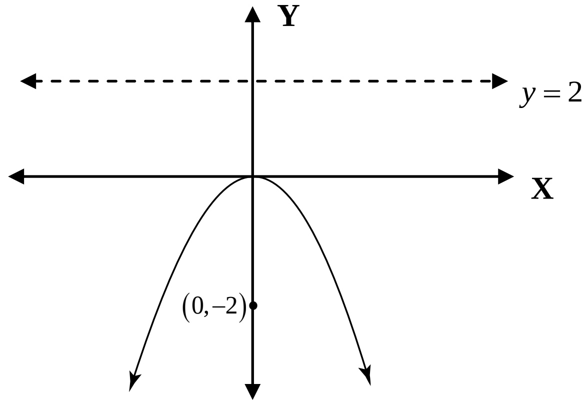


2. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene foco igual a $(0, 3)$ y directriz $y = -3$. Grafique la curva.

R/ $x^2 = 12y$



3. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene foco igual a $(0,-2)$ y directriz $y=2$. Grafique la curva.
   R/ $x^2=-8y$



En resumen:

El siguiente cuadro muestra la ecuación cartesiana de la parábola, su vértice, eje, foco, directriz y dirección hacia dónde se abre la curva, para el caso en que el vértice sea el origen.

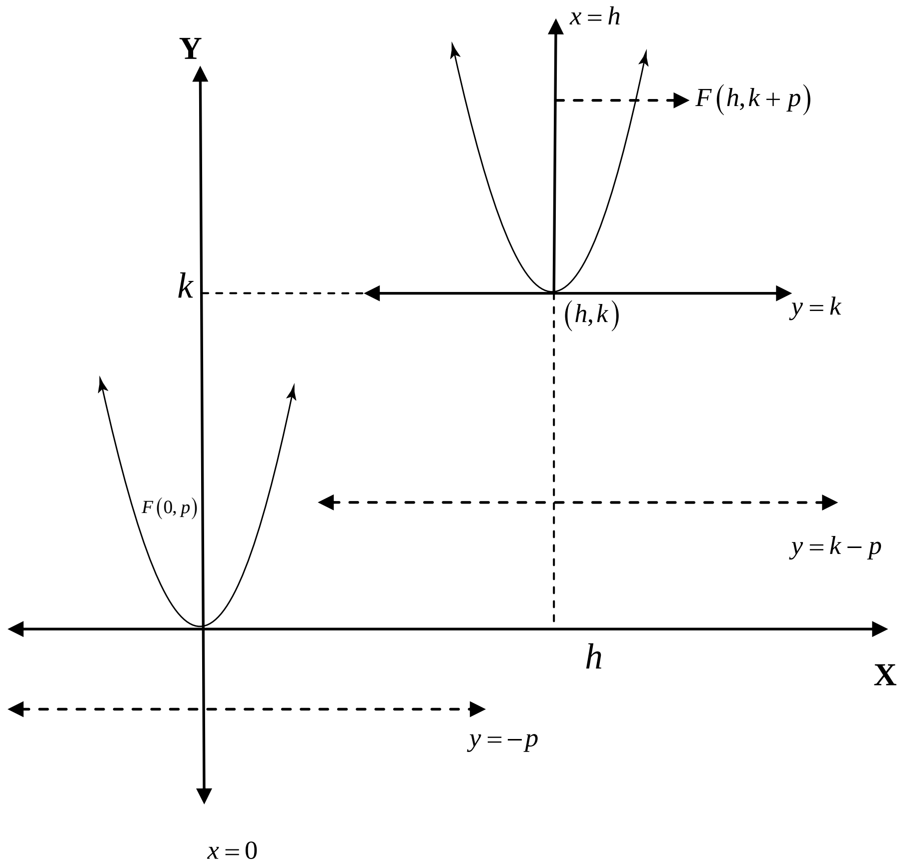
Aunque se presentan las ecuaciones cartesianas de los dos casos de parábolas, recuerden que en este curso solo se estudiaran las que tienen eje de simetría paralelo al eje Y.

Formas estándar para las parábolas que tienen vértice en el origen

Ecuación Cartesiana	Vértice	Eje	Foco	Directriz	La parábola se abre
$x^2=4py$	$(0,0)$	$x=0$	$(0,p)$	$y=-p$	hacia arriba si $p>0$ hacia abajo si $p<0$
$y^2=4px$	$(0,0)$	$y=0$	$(p,0)$	$x=-p$	hacia la derecha si $p>0$ hacia la izquierda si $p<0$

4.3 La parábola con vértice en (h,k)

La siguiente figura ilustra lo que ocurre cuando desplazamos una parábola simétrica con respecto al eje Y y con vértice (0, 0) de manera horizontal h unidades y de manera vertical k unidades.



El desplazamiento horizontal y vertical de la parábola produjo otra con eje de simetría paralelo a su eje original. Este tipo de desplazamiento es una **traslación del eje**. En este caso, el nuevo eje de la parábola es paralelo al eje Y.

Como se puede observar en la figura anterior, se obtiene una parábola con las siguientes propiedades: su vértice es (h,k); su eje de simetría es la recta vertical $x=h$; su foco es $F(h,k+p)$ y su directriz es $y=k-p$.

De la misma forma en que obtuvimos la ecuación de la parábola con vértice en el origen, se puede deducir la forma canónica de la ecuación para la parábola con vértice (h,k), foco $F(h,k+p)$ y eje de simetría $x=h$. La forma estándar de la ecuación de esta parábola es $(x-h)^2=4p(y-k)$; igual que en el caso anterior, la distancia del vértice al foco es $|p|$ y la distancia del vértice a la directriz también es $|p|$.

Formas estándar para las parábolas que tienen vértice en el origen

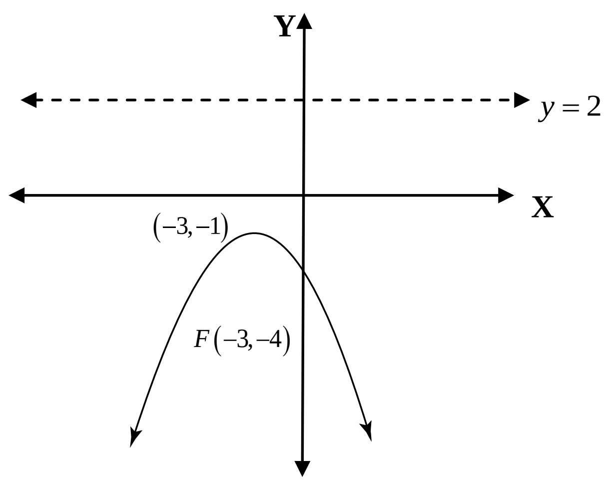
Ecuación Cartesiana	**Vértice**	**Eje**	**Foco**	**Directriz**	**La parábola se abre**
$(x-h)^2=4p(y-k)$	(h,k)	$x=h$	$(h,\ k+p)$	$y=k-p$	hacia arriba si $p>0$ hacia abajo si $p<0$
$(y-k)^2=4p(x-h)$	(h,k)	$y=k$	$(h+p,\ k)$	$x=h-p$	hacia la derecha si $p>0$ hacia la izquierda si $p<0$

Ejemplos

1. Determine la ecuación en forma estándar de la parábola con vértice $(-3,-1)$ y directriz $y=2$. Además indique cuál es el foco y grafique la parábola.

Solución

Empezamos localizando el vértice $(-3,-1)$ y la directriz $y=2$ en el plano cartesiano; como el vértice está colocado 3 unidades por debajo de la directriz, se deduce que $p=-3$ y así, la ecuación de la parábola es $(x+3)^2=-12(y+1)$ y el foco es $(-3,-4)$.



2. Grafique la parábola $2x^2+8x-y+8=0$; diga cuál es su ecuación en forma estándar, su vértice, su directriz, su eje de simetría y su foco.

Solución

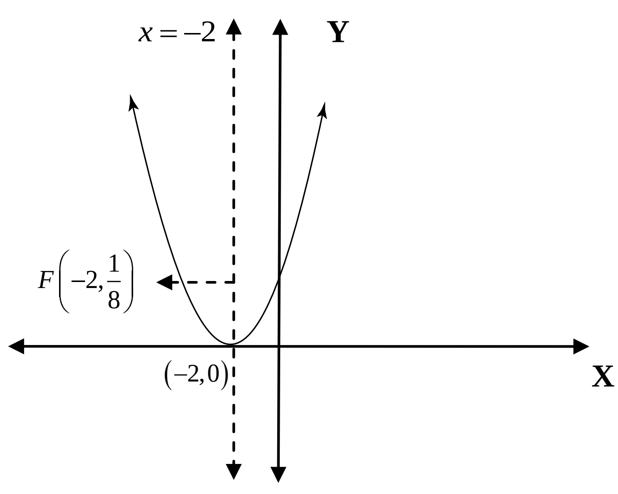
Primeramente completamos cuadrados, pero antes se debe considerar que el coeficiente de x^2 en la ecuación estándar de la parábola es igual a 1 y por lo tanto se procede de la siguiente manera.

$$2\left(x^2+4x+\quad\right)=y-8 \quad \Rightarrow 2\left(x^2+4x+4\right)=y-8+8 \quad \Rightarrow 2\left(x+2\right)^2=y \quad \Rightarrow \left(x+2\right)^2=\frac{1}{2}y$$

Ahora para encontrar el valor de p hacemos que $4p=\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{1}{8}$.

Finalmente la ecuación estándar de esta parábola es $\left(x+2\right)^2=\frac{1}{2}y$, su vértice es $\left(-2,0\right)$, su eje de simetría es $x=-2$, su directriz es $y=-\frac{1}{8}$ y su foco es $\left(-2,\frac{1}{8}\right)$.

Para graficar la parábola, observamos que se abrirá hacia arriba $\left(p=\frac{1}{8}\right)$ con vértice $\left(-2,0\right)$ y foco $\left(-2,\frac{1}{8}\right)$; además, el punto $\left(0,8\right)$ está sobre la parábola y como la curva es simétrica con respecto a su eje de simetría se puede localizar otro punto de la parábola. Puesto que el eje es $x=-2$ y $\left(0,8\right)$ es un punto de la parábola, sabemos por simetría que el punto $\left(-4,8\right)$ está también sobre la parábola; con esta información es suficiente para trazar la gráfica.



3. Grafique la parábola $x^2 - 6x - 7 = 2y$. Diga cuál es su ecuación en forma estándar, su vértice, su directriz, su eje de simetría y su foco.

Solución

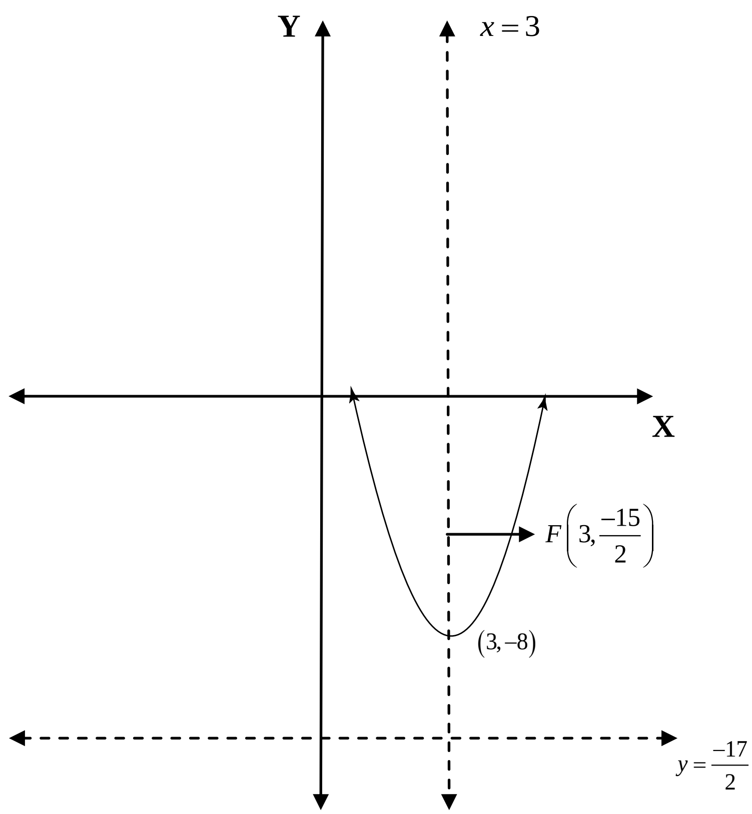
Ecuación en forma estándar $(x-3)^2 = 2(y+8)$

Vértice $(3,-8)$

Directriz $y = \dfrac{-17}{2}$

Eje de Simetría $x = 3$

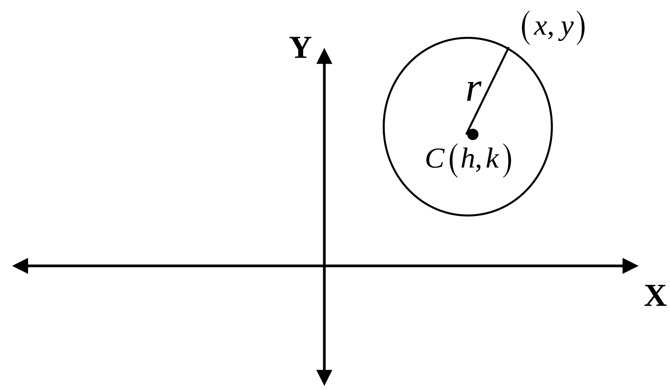
Foco $\left(3, \dfrac{-15}{2}\right)$



5. Ecuación de la circunferencia

5.1 Circunferencia

Es el conjunto de los puntos, en el plano, equidistantes de un punto fijo; este punto fijo se llama centro y se denota por $C(h,k)$. La distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia es igual al radio r.



5.2 Forma canónica de una circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r

De la fórmula de la distancia se tiene que un punto (x,y) está en la circunferencia de centro $C(h,k)$, si y solo si $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$; aplicando propiedades algebraicas a esta ecuación se obtiene la forma canónica de una circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio igual a r.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

En particular; si el centro del círculo es el origen, la ecuación de la circunferencia se reduce a

$$x^2+y^2=r^2$$

Ejemplos

1. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro $(-1,5)$ y radio igual a 4.

Solución

Se procede a sustituir los valores respectivos en la ecuación canónica de la circunferencia:

$$h=-1, \quad k=5 \quad y \quad r=4$$
$$\left(x-(-1)\right)^2+\left(y-5\right)^2=4^2$$
$$\Rightarrow \left(x+1\right)^2+\left(y-5\right)^2=16$$

2. Determinar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $2x^2+2y^2-8x+12y-28=0$

Solución

Debemos completar cuadrados para obtener la ecuación en su forma canónica; no obstante, antes de hacerlo dividimos por 2 ambos miembros de la ecuación, pues los coeficientes de los términos x^2 y y^2 deben ser iguales a 1; después de completar cuadrados se factoriza la ecuación. Veamos:

$$
\begin{array}{ll}
2x^2+2y^2-8x+12y-28=0 & \\
\Rightarrow x^2+y^2-4x+6y-14=0 & \text{(dividiendo por 2)} \\
\Rightarrow (x^2-4x\ )+(y^2+6y\ )=14 & \text{(para completar cuadrados)} \\
\Rightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=14+4+9 & \text{(completando cuadrados)} \\
\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=27 & \text{(factorizando)}
\end{array}
$$

Así, el centro de la circunferencia es $C(2,-3)$ y $r=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

6. Intersección de curvas

6.1 Intersección entre rectas

Si dos curvas tienen un punto común R; entonces R está sobre ambas curvas, sus coordenadas satisfacen ambas ecuaciones y; por lo tanto, pueden obtenerse resolviendo estas ecuaciones simultáneas. Recíprocamente, todas las soluciones simultáneas son parejas de números que satisfacen ambas ecuaciones al mismo tiempo y por consiguiente, si éstos son números reales representan los puntos comunes de las curvas; a estos puntos se les llama puntos de intersección de las curvas.

Nota: Se llama sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas al conjunto de dos ecuaciones lineales con dos variables; resolverlo significa hallar el punto de intersección de las rectas que representan ambas ecuaciones.

Considere los siguientes casos:

a) Rectas oblicuas

Si las rectas son oblicuas, su intersección será un solo punto. La solución del sistema será $S=\{(x,y)\}$; este sistema recibe el nombre de compatible o consistente.

Ejemplo

Hallar el punto de intersección de las rectas $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ x+y=-4 \end{cases}$.

Solución

Por el método de eliminación de variables

Multiplicando por $(\text{-}2)$ la segunda ecuación, para eliminar la variable independiente, obtenemos:

$$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ -2x-2y=8 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro de las ecuaciones obtenemos $y=-2$.

Luego sustituyendo ese valor en cualquiera de las ecuaciones originales, encontramos x

$$x+y=-4 \Rightarrow x=-4-y \Rightarrow x=-4-(-2) \Rightarrow x=-2$$

Así, el punto de intersección de las rectas es $(-2,-2)$ y la solución del sistema es S=$\{(-2,-2)\}$

b) Rectas paralelas

Si las rectas son paralelas, no poseen ningún punto en común; es decir, no se intersecan; así que el conjunto solución del sistema es $S=\phi$; este sistema recibe el nombre de incompatible o inconsistente. En el caso de resolverse el sistema por la Regla de Cramer, si $\Delta=0$ entonces las rectas son paralelas.

Ejemplo

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ -8x+4y=5 \end{cases}$ y dé el conjunto solución.

Solución

Por el método de igualación

Despejando la variable y en ambas ecuaciones y luego igualando se obtiene:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=2x+\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x=2x+\dfrac{5}{4} \Rightarrow 0=\dfrac{5}{4}$ (lo cual no es cierto, pues es una contradicción)

Así, las rectas no poseen ningún punto en común y la solución del sistema es $S=\phi$

c) Rectas coincidentes

Si las rectas coinciden, entonces todos los puntos son comunes; el sistema posee infinitas soluciones: $S=\{(x,y)/\,ax+by=c,\ \ a,b,c$ son constantes $a,b,c\in\mathbb{R}\}$; este sistema se llama dependiente.

Ejemplo

Resuelva el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$ y dé el conjunto solución.

Solución

Por el método de sustitución

Se despeja una de las variables $(x$ ó $y)$ de cualquiera de las dos ecuaciones. Luego se sustituye en la otra ecuación y se resuelve. Veamos:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \quad \Rightarrow \quad y=5-2x \\ 6x+3y=15 \end{cases}$$

Por sustitución

$6x+3(5-2x)=15 \;\Rightarrow\; 6x+15-6x=15 \;\Rightarrow\; 15=15$ (lo cual si es cierto)

$S=\left\{(x,y)\middle|2x+y=5\right\}$

6.2 Intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.

Si la recta está en la forma $y=mx+b,\ m\neq 0$ entonces se sustituye en la ecuación de la parábola la y por $mx+b$ para calcular el valor o los valores de la variable(s) x; luego se sustituye ese valor en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar la ordenada (y). En el caso de ser dos parábolas se procede a despejar las ecuaciones de tal forma que puedan igualarse, luego se sustituye el valor o los valores encontrados para la variable con la que se decidió trabajar en cualquiera de las ecuaciones de las parábolas para hallar la(s) variable(s) restante(s).

El punto o los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia es (son) de la forma (x,y).

Ejemplos:

Hallar, si existe(n), o los puntos de intersección de las siguientes curvas.

a) La recta $y=2x-1$ y la parábola cuya ecuación es $y-2x^2+x=-1$.

Solución

Como $y=2x-1$ se puede sustituir la "y" en la ecuación de la parábola de la siguiente manera:

$$y-2x^2+x=-1 \Rightarrow (2x-1)-2x^2+x=-1 \Rightarrow -2x^2+3x=0 \Rightarrow x(-2x+3)=0 \Rightarrow x=0 \ y \ x=\frac{3}{2}$$

Ahora se sustituye cada valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones para encontrar el valor de y.

Se tiene que:

Si $x=0$ entonces $y=-1$.

Si $x=\frac{3}{2}$ entonces $y=2.$

Por lo tanto las curvas se intersecan en los puntos $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ y $(0, \ -1).$

b) Las parábolas $y=x^2-x+5$ y $y=x^2+2x+3$.

Solución

Se despejan ambas ecuaciones de tal forma que queden igualadas ambas a una misma variable. Si ya están despejadas como es el caso se procede a la igualación y se resuelve la ecuación resultante.

$$x^2-x+5=x^2+2x+3 \Rightarrow -3x=-2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

Ahora se sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones de las parábolas para encontrar el valor de y.

Se tiene que:

Si $x=\frac{2}{3}$ entonces $y=\frac{43}{9}$.

Por lo tanto las curvas se intersecan en un único punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{43}{9}\right)$.

6.3 Intersección de una recta con una circunferencia.

Si la recta está en la forma $y=mx+b,\ m\neq 0$ entonces se sustituye en la ecuación de la circunferencia la y por $mx+b$ para calcular el valor o los valores de la variable(s) x; luego se sustituye ese valor en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar la ordenada (y).

El punto o los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia es (son) de la forma (x, y).

Ejemplo

Hallar el punto de intersección entre la recta cuya ecuación es $y = -4x + 2$ y la circunferencia con ecuación $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$.

Solución

Sustituyendo $-4x+2$ en la y de la circunferencia y resolviendo la ecuación se tiene que:

$$(x-2)^2 + (-4x+2+1)^2 = 25 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 24x + 9 = 25$$

$$\Rightarrow 17x^2 - 28x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2,\;\; x_2 = -\frac{6}{17}$$

Luego:

- Para $x = 2$

$y = -4x + 2 \;\Rightarrow\; y = -4(2) + 2 \;\Rightarrow\; y = -6$

- Para $x = -\frac{6}{17}$

$y = -4x + 2 \;\Rightarrow\; y = -4\left(-\frac{6}{17}\right) + 2 \;\Rightarrow\; y = \frac{58}{17}$

Finalmente, los puntos de intersección de la recta y la circunferencia son:

$$(2,\; -6) \quad y \quad \left(-\frac{6}{17},\; \frac{58}{17}\right)$$

Ejercicios

1. Encuentre la distancia entre cada pareja de puntos.

   $a.\ (4,\ \ -1)\ y\ (2,\ \ 0)$ $\qquad$ $b.\ \left(\frac{1}{2},\ \ 2\right)\ y\ (-2,\ \ 1)$

   $c.\ (-3,\ \ 1)\ y\ (-2,\ \ -3)$ $\qquad$ $d.\ (a,\ \ 2)\ y\ (b,\ \ 2)$

2. La ordenada de un punto es 6 y su distancia al punto (-3, 2) es 5. Determine la abscisa (o las abscisas) del punto.

3. La ordenada de un punto es 2 y su distancia al punto (3, 7) es 5. Encuentre la abscisa (o las abscisas) del punto.

4. Si P es el punto $(1, a)$ y su distancia al punto (6, 7) es 13, determine el valor (o los valores) de a.

5. Sea el punto $P\ (x, 2)$. La distancia de P al punto A (9, -6) es dos veces la distancia de P al punto B (-1, 5). Encuentre el valor (o valores) de x.

6. Si P es el punto $(-1,\ y)$ y su distancia al origen es la mitad de su distancia al punto $(1,\ 3)$, determine el valor (o valores) de y.

7. ¿Cuáles son los valores de x que satisfacen que $d(P,\ Q) = 3$ con $P(1, 0)$ y $Q(-1,\ x)$?

8. Hallar en cada caso la ecuación de la recta que contiene los puntos de coordenadas.

   $a.\ (-2,\ \ 3)\ y\ (4,\ \ -1)$ $\qquad$ $b.\ (0,\ \ -2)\ y\ (3,\ \ 0)$

   $c.\ (2,\ \ -3)\ y\ (-2,\ \ 1)$ $\qquad$ $d.\ (-1,\ \ -2)\ y\ (2,\ \ -2)$

9. Hallar la pendiente y la intersección con el eje de las ordenadas de las rectas de ecuación:

   a. $2x-3y+7=0$
   b. $0=3x-5y$
   c. $2,4=1,2x+0,04y$
   d. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=4$
   e. $-3x+5y=8$
   f. $3,6y-2,5x-1,8=0$

10. Una recta tiene una pendiente de –4 y la intersección con el eje y es el par ordenado (0, 2). ¿Está el punto (100, -392) en la recta? Explique.

11. ¿Cuáles de los puntos (-3, 0), (6, 3), (1, 1), están sobre la recta que pasa por los puntos $(-6,\ -1)$ y $(3,\ 2)$?

12. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, -2) y es paralela a la recta $3x-5y=8$.

13. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto (-1, 1) y es perpendicular a la recta de ecuación $x+y=2$.

14. La recta l pasa por el punto $\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$ y es perpendicular a la recta $3x+4y=12$. ¿En cuál punto corta l al eje x?

15. Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, perpendiculares o de ninguno de estos tipos. En el caso en que sean paralelas determinar la distancia entre ellas.

   a. $2x+3y=6$ y $3x-2y=6$
   b. $y=x$ y $x+y=1$
   c. $y=2x+3$ y $x=2y+3$
   d. $4x+2y=1$ y $y=2-2x$
   e. $x=-2-3y$ y $2x+6y=5$
   f. $3x+4y=1$ y $3x-4y=1$
   g. $y-3=0$ y $x+5=0$
   h. $2x-5=0$ y $3-x=0$

16. Encuentre la ecuación de las rectas que satisfacen las condiciones siguientes. Trace la gráfica de cada una en un mismo eje de coordenadas.

    a. Pasa por el punto (2, -1) y es paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.
    b. Pasa por el punto (2, 3) y es perpendicular a la recta determinada por los puntos (-1, -2) y (2, 1).
    c. Pasa por el punto (-1, 2) y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$.
    d. Pasa por el punto (0, -1) y es paralela a la recta determinada por los puntos (2, 2) y (3, 1).

17. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$ si:
    a. $A(-3, 2)$ y $B(1, 6)$
    b. $A(-3, 1)$ y $B(5, 4)$

18. Hallar las coordenadas del punto equidistante a los puntos A(1, 7), B(8, 6) y C (7, -1).

19. ¿Es el triángulo de vértices A (-5, -1), B (2, 3), C (3, -2) isósceles?

20. Determine el área del triángulo cuyos vértices son: A(0, -6), B(7, -13), C(15, 2).

21. Hallar las coordenadas del baricentro (punto de intersección de las medianas) del triángulo cuyos vértices son A(5, 7), B(1, -3), C(-5, 1).

22. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: A(-2, 1), B(5, 2), C(2, -3).

23. Hallar el valor (o valores) de *k*, para que la distancia *d* del punto P(2, 3) a la recta $8x + 15y + k = 0$ sea igual a 5.

24. Los ejercicios siguientes se refieren al triángulo cuyos vértices son: A(-2, 1), B(4, 7), C(6, -3).
    a. Hallar la ecuación de la recta que contiene al vértice A y es paralela al lado $\overline{BC}$.
    b. Hallar las ecuaciones de las medianas del triángulo.
    c. Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo.
    d. Hallar las ecuaciones de las alturas del triángulo.
    e. Hallar el punto de intersección de las medianas (baricentro).
    f. Hallar el punto de intersección de las mediatrices (circuncentro).
    g. Hallar el punto de intersección de las alturas (ortocentro).

25. Verifique que los puntos (3, 0), (4, 5), (6, 2) son los vértices de un triángulo rectángulo.

26. Determinar cuáles de los triángulos, cuyos vértices son los puntos dados corresponden, a triángulos isósceles.
    a. (0, 5), (-3, 4) , (-1, 2)
    b. (-3,2), (1, -1), (-2, -5)
    c. (-1, 4), (-4, -1) , (-1, -2)

27. Dado el paralelogramo ABCD con A(2, 0), B(4, 0), C(4, 3), D(6, 3). Compruebe el siguiente resultado de geometría:

    "La suma de los cuadrados de las diagonales en un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados"

28. Para cada uno de los ejercicios siguientes, encuentre el foco, la directriz, el vértice, el eje de simetría. Además grafique la parábola.
    a. $x^2 = 4y$
    b. $x^2 = -16y$
    c. $x^2 = 28y$
    d. $4x^2 = 2y$
    e. $x^2 = \frac{1}{10}y$
    f. $x^2 = -64y$
    g. $(x+5)^2 = -4(y+1)$
    h. $(x-2)^2 + y = 0$
    i. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$
    j. $-2x^2 + 12x - 8y - 18 = 0$
    k. $3x^2 + 30x - 8y + 75 = 0$
    l. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$
    m. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$

29. Encuentre la ecuación canónica de la parábola que satisface las condiciones dadas. Además grafique las parábolas.

    a. Foco $(0, 7)$ y directriz $y = -7$
    b. Foco $(0, -5)$ y directriz $y = 5$
    c. Foco $(2, 3)$ y directriz $y = -3$

d. Foco $(-2,0)$ y directriz $y=\frac{3}{2}$

e. Foco $(0,-10)$ y vértice $(0,0)$

f. Foco $(1,\ 5)$ y vértice $(1,\ -3)$

g. Foco $(-2,\ 3)$ y vértice $(-2,\ 5)$

h. Vértice $(5,1)$ y directriz $y=7$

i. Vértice $(0,0)$ y directriz $y=-\frac{7}{4}$

30. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas L y L' dadas sus ecuaciones en cada caso.

a. $L: 3x-1=y$, $L': \frac{x+y}{2}=-1$

b. $L: x+y+2=0$, $L': 2x+5y-3=0$

c. $L: y+3=0$, $L': 2x+y=1$

31. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la recta L con la parábola P dadas sus ecuaciones en cada caso.

a. $L: y-3x=1$, $P: y-x^2+x=5$

b. $L: 3x+1=y$, $P: y=x^2-x+5$

c. $L: y=3x+1$, $P: y=x^2-x+5$

d. $L: y-x+1=0$, $P: y+2x-1=x^2$

e. $L: \frac{x+y}{2}=2$, $P: y+3x-2=x^2$

f. $L: y=x-1$, $P: y=x^2-2x+1$

32. Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola P con la parábola P' dadas sus ecuaciones en cada caso.

a. $P: y-x^2+3x=1$, $P': y=x^2-x+1$

b. $P: y-2x^2+x=-1$, $P': y=x^2+2x+3$

c. $P: y+3x=x^2+1$, $P': y+x-x^2=1$

d. $P: y+1-x^2=-2x$, $P': y+x^2+2=0$

e. $P: y-x^2=-1$, $P': y+4=-x^2$

f. $P: y+3x=x^2+1$, $P': y-3=2x+x^2$

33. Determine la ecuación canónica y en la forma general, de la circunferencia cuyo centro es (2,-3) y el radio es igual a 5cm.

34. Utilizando el método de completar cuadrados, investigue si la gráfica de la ecuación $2x^2+2y^2-5x+4y-1=0$ corresponde a la de una circunferencia. De ser así, encuentre el centro y el radio.

35. Encuentre la ecuación de la circunferencia, en su forma canónica y en su forma general, que satisface las condiciones dadas en cada caso.
    a. Centro (3, -2) y radio 4
    b. Centro (-4, 6) y radio 5
    c. Centro (1, -3) y pasa por el punto Q(2, -1)
    d. Centro (0, 0) y pasa por P(-3, 5)

36. Mediante el método de completar cuadrados, encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:
    a. $x^2+y^2+x+y=1$
    b. $x^2+y^2+4x-6y+4=0$
    c. $x^2+y^2-10x+2y+22=0$
    d. $3x^2+3y^2+18x+30y=141$
    e. $9x^2+9y^2-6x+12y-31=0$

37. Hallar, en cada caso, el(los) punto(s) de intersección de la recta y la circunferencia cuyas ecuaciones se dan a continuación.
    a. $L: y=3x+4$
       $C: (x-3)^2+(y-2)^2=10$
    b. $L: 2y=-8x+4$
       $C: (x-2)^2+(y+1)^2=25$
    c. $L: 2y=6x+8$
       $C: (x-3)^2+(y-2)^2=10$

Solución a los ejercicios

1. a. $\sqrt{5}$ b. $\frac{\sqrt{29}}{2}$ c. $\sqrt{17}$ d. $|b-a|=|a-b|$
2. $x=0$ o $x=-6$
3. $x=3$
4. $a=19$ o $a=-5$
5. $x=3$ o $x=-\frac{35}{3}$
6. $y=1$ o $y=-3$
7. $x=-\sqrt{5}$ o $x=\sqrt{5}$
8. a. $y=\frac{-2x+5}{3}$ b. $y=\frac{2x}{3}-2$ c. $y=-x-1$ d. $y=-2$
9. a. $m=\frac{2}{3}$ y $b=\frac{7}{3}$ b. $m=\frac{3}{5}$ y $b=0$ c. $m=-30$ y $b=60$

   d. $m=\frac{-3}{2}$ y $b=12$ e. $m=\frac{3}{5}$ y $b=\frac{8}{5}$ f. $m=\frac{25}{36}$ y $b=\frac{1}{2}$
10. El punto no está sobre la recta la $y=-4x+2$ puesto que la ordenada para $x=100$ no es $y=-392$.
11. Los puntos que están sobre la recta $y=\frac{1}{3}x+1$ son $(-3,\ 0)$ y $(6,\ 3)$.
12. $y=\frac{3x-16}{5}$
13. $y=x+2$
14. $\left(\frac{7}{8},\ 0\right)$

15. a. Son rectas perpendiculares.
    b. Son rectas perpendiculares.
    c. Son rectas oblicuas no perpendiculares.
    d. Son rectas paralelas y la distancia entre ellas es $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
    e. Son rectas paralelas y la distancia entre ellas es $\frac{9\sqrt{10}}{20}$
    f. Son rectas oblicuas no perpendiculares
    g. Son rectas perpendiculares
    h. Son rectas paralelas

16. a. $y=-3x+5$ b. $y=-x+5$ c. $y=\frac{-3x+1}{2}$ d. $y=-x-1$

17. a. $(-1,\ 4)$ b. $\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$

18. El punto equidistante es $(4,\ 3)$

19. Sí es isósceles

20. El área es aproximadamente 80,32 ul^2

21. $\left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

22. Los vértices son $(9,\ -2)$, $(-5,\ -4)$, $(1,\ 6)$

23. $k=-146$ o $k=24$

24. a. $y=-5x-9$ b. $y=4x-9$, $y=\frac{-7x+27}{5}$, $y=\frac{x+9}{7}$
    c. $y=2x-5$, $y=-x+5$, $y=\frac{x}{5}+1$ d. $y=-x+3$, $y=\frac{x+7}{5}$, $y=2x-1$
    e. $\left(\frac{8}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ f. $\left(\frac{10}{3},\ \frac{5}{3}\right)$ g. $\left(\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

25. Sí, son los vértices de un triángulo rectángulo (se debe usar Pitágoras).

26. a. Sí es triángulo isósceles

    b. No es triángulo isósceles

    c. Sí es triángulo isósceles

27. Si se cumple la afirmación. La suma de los cuadrados de las diagonales da 34 y la suma de los cuadrados de los lados también.

28. a. Foco: $(0,\ 1)$; Directriz: $y=-1$; Vértice: $(0,0)$; Eje: $x=0$

    b. Foco: $(0,\ -4)$; Directriz: $y=4$; Vértice: $(0,0)$; Eje: $x=0$

    c. Foco: $(0,\ 7)$; Directriz: $y=-7$; Vértice: $(0,0)$; Eje: $x=0$

    d. Foco: $\left(0,\ \dfrac{1}{8}\right)$; Directriz: $y=-\dfrac{1}{8}$; Vértice: $(0,0)$; Eje: $x=0$

    e. Foco: $\left(0,\ \dfrac{1}{40}\right)$; Directriz: $y=-\dfrac{1}{40}$; Vértice: $(0,0)$; Eje: $x=0$

    f. Foco: $(0,\ -16)$; Directriz: $y=16$; Vértice: $(0,0)$; Eje: $x=0$

    g. Foco: $(-5,\ -2)$; Directriz: $y=0$; Vértice: $(-5,-1)$; Eje: $x=-5$

    h. Foco: $\left(2,\ -\dfrac{1}{4}\right)$; Directriz: $y=\dfrac{1}{4}$; Vértice: $(2,0)$; Eje: $x=2$

    i. Foco: $\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{15}{16}\right)$; Directriz: $y=-\dfrac{17}{16}$; Vértice: $\left(-\dfrac{5}{2},\ -1\right)$; Eje: $x=-\dfrac{5}{2}$

    j. Foco: $(3,\ -1)$; Directriz: $y=1$; Vértice: $(3,\ 0)$; Eje: $x=3$

    k. Foco: $\left(-5,\ \dfrac{2}{3}\right)$; Directriz: $y=-\dfrac{2}{3}$; Vértice: $(-5,\ 0)$; Eje: $x=-5$

    l. Foco: $\left(-3,\ -\dfrac{9}{4}\right)$; Directriz: $y=-\dfrac{7}{4}$; Vértice: $(-3,\ -2)$; Eje: $x=-3$

    m. Foco: $(1,\ 5)$; Directriz: $y=3$; Vértice: $(1,\ 4)$; Eje: $x=1$

29. a. $x^2 = 28y$ b. $x^2 = -20y$ c. $(x-2)^2 = 12y$

d. $(x+2)^2 = -3\left(y - \frac{3}{4}\right)$ e. $x^2 = -40y$ f. $(x-1)^2 = 32(y+3)$

g. $(x+2)^2 = -8(y-5)$ h. $x^2 = 7y$ i. $(x-5)^2 = -24(y-1)$

30. a. $\left(-\frac{1}{4},\ -\frac{7}{4}\right)$ b. $\left(\frac{-13}{3},\ \frac{7}{3}\right)$ c. $(2,\ -3)$

31. a. $(2,\ 7)$ b. $(2,\ 7)$ c. $(2,\ 7)$

d. $(2,\ 1)$ y $(1,\ 0)$ e. $\left(1+\sqrt{3},\ \ 1{,}26\right)$ y $\left(1-\sqrt{3},\ \ 4{,}73\right)$ f. $(2,\ 1)$ y $(1,\ 0)$

32. a. $(2,\ 3)$ b. $(4,\ 27)$ y $(-1,\ 2)$ c. $(0,\ 1)$

d. No se intersecan e. No se intersecan f. $\left(\frac{-2}{5},\ \frac{59}{25}\right)$

33. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25;$ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

34. Sí corresponde a una circunferencia, $C\left(\frac{5}{4},\ -1\right)$ y $r = \frac{7}{4}$

35. a. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16;$ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

b. $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 25;$ $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 27 = 0$

c. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5;$ $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$

d. $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 34;$ $x^2 + y^2 = 34$

36. a. $C\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ y $r=\sqrt{\frac{3}{2}}$ b. $C(-2,\ 3)$ y $r=3$ c. $C(5,\ -1)$ y $r=2$

d. $C(-3,\ -5)$ y $r=9$ e. $C\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ y $r=2$

37. a. No se intersecan b. $(2,\ -6)$ y $\left(\frac{-6}{17},\ \frac{58}{17}\right)$ c. No se intersecan

Referencias Bibliográficas

González, J. (2009). *Geometría Analítica*. San José, Costa Rica: Editorial EUNED.

Larson R., Hostetler R., Edwards B. (2010). *Cálculo. Volumen 1. McGraw-Hill, 9na Ed. , México.*

Lehmann, C. (1993). *Geometría analítica.* México: Editorial Limusa S. A.

Swokowski, E. (2009). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Cengage Learning.