Unidad Didáctica II: Funciones

El estudiante al terminar la unidad didáctica de funciones deberá dominar los siguientes contenidos:

a) Definición de relación: dominio, ámbito, variables independientes, variables dependientes. Representación e interpretación gráfica de relaciones.
b) Definición de función como criterio de correspondencia.
c) Definición de función real de variable real.
d) Definición de dominio, codominio, preimagen, imagen, rango y gráfico.
e) Interpretación gráfica de conceptos tales como: dominio, rango, preimagen, imagen, ceros, signo, monotonía.
f) Dominio real y rango de una función cuyo criterio está dado por una expresión algebraica en $\mathbb{R}$ (fraccionarias, radicales, polinómicas).
g) Funciones particulares: constante, identidad, lineal, cuadrática, parte entera, raíz cuadrada, valor absoluto y definidas con diferentes criterios de asociación en su dominio. Representación gráfica de funciones y sus trasformaciones.
h) Función lineal (definición, pendiente, trazo de la gráfica, intersección con los ejes, crecimiento y decrecimiento).
i) Función cuadrática (definición, trazo de la gráfica, intersección con los ejes, vértice, monotonía, concavidad, signo).
j) Funciones crecientes y funciones decrecientes.
k) Función par e impar. Signo de una función.
l) Operaciones con funciones (suma, resta, multiplicación, división, composición).
m) Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Identificación de gráficas que corresponden a funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Condiciones a cumplir por una función para ser inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
n) Función inversa. Cálculo de la función inversa. Gráfica de una función y su inversa.
o) Problemas de aplicación de funciones.

Al terminar de estudiar este tema con sus ejercicios y problemas, el estudiante debe ser capaz de:

1. Dominar en forma intuitiva, analítica y gráfica los conceptos: variable independiente, variable dependiente, función, dominio, codominio, ámbito o rango, imagen, preimagen, gráfico de una función, función creciente, función decreciente, función inyectiva, función sobreyectiva, función biyectiva, intersección de funciones con los ejes coordenados, concepto de función par e impar y signo de una función.
2. Calcular el dominio real y el rango de distintos tipos de funciones reales de variable real, representadas de diversas maneras.
3. Reconocer, determinar, interpretar y graficar funciones lineales.
4. Determinar la pendiente, intersección con los ejes, crecimiento y decrecimiento de una función lineal.
5. Reconocer, determinar, interpretar y graficar funciones cuadráticas.

6. Determinar el dominio, codominio, intersección con los ejes, vértice, monotonía, concavidad, ámbito y signo de funciones cuadráticas.
7. Graficar funciones con diferentes criterios de asociación (constante, identidad, lineal, cuadrática, parte entera, raíz cuadrada, valor absoluto y funciones por trozos).
8. Realizar traslaciones y contracciones de gráficas de funciones.
9. Analizar e interpretar gráficas de funciones.
10. Realizar operaciones con funciones (suma, resta, multiplicación, división y composición).
11. Encontrar, graficar e interpretar, la función inversa de una función biyectiva conocida.
12. Resolver problemas donde se aplican los conceptos estudiados de funciones.

Relación

Una idea intuitiva del significado de relación se puede tomar de situaciones cotidianas, por ejemplo existe relación entre cada persona y su edad, la longitud del lado de un cuadrado y su área, entre otras.

Definición

Una relación se da entre dos conjuntos no vacíos donde sus elementos se asocian por medio de una regla de asociación, tiene un conjunto de partida llamado dominio y otro de llegada llamado codominio.

Concepto de función

Actividad de introducción

Analice la siguiente situación:

La relación establecida entre cada provincia de nuestro país y su superficie, como se aprecia en la tabla adjunta,[1] es una función

Provincia	Superficie en km^2
San José	4 959
Alajuela	9 752
Cartago	3 124
Heredia	2 656
Guanacaste	10 140
Puntarenas	11 276
Limón	9 188

Discusión

Se puede observar en la tabla adjunta que existen dos conjuntos que se están relacionando, en primera instancia el conjunto conformado por las provincias de Costa Rica y en segunda el conjunto de los números reales (se da en la tabla solo algunos valores de este conjunto); además la regla de asociación es que a cada provincia se le asigna un número real que representa la superficie en kilómetros cuadrados.

[1] Tomado de Arias y Barrantes (2010)

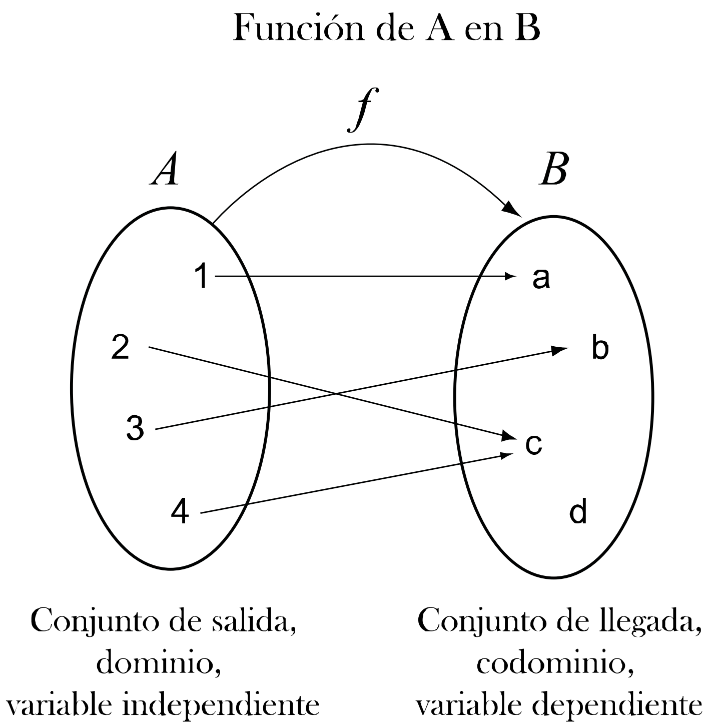
Se puede notar que a cada elemento del conjunto de partida (dominio) se le asocia un único elemento del codominio; esto es cada provincia tiene una única medida de su superficie. Por lo anterior la relación descrita se puede considerar como una función.

Definición

Una función es una relación que asocia a cada uno de los elementos de un primer conjunto A (llamado dominio de la función), un único elemento de un segundo conjunto B (llamado codominio de la función).

Si la función se denota por f entonces se escribe $f: A \rightarrow B$ con $f(x) = y$, donde x es un elemento del dominio A y su elemento asociado y en el codominio B se llama imagen de x y está última variable (x) se llama preimagen de y. La variable x se llama independiente porque puede tomar cualquier valor en el conjunto A, mientras que y se llama variable dependiente porque una vez que se fija un valor para x, el valor de y es la imagen de esa x y no cualquier elemento del conjunto B.

Ejemplo



Función real de variable real

Definición

Si para la función $f: A \rightarrow B$ se cumple que A, B son subconjuntos de los números reales, entonces se dice que *f* es una **función real de variable real**.

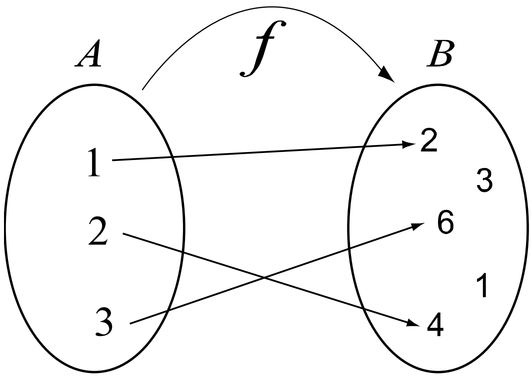
Cuando se trabaja con funciones reales de variable real, se puede describir la relación de las variables independientes y dependientes mediante una fórmula (o criterio de asociación) que permite encontrar la imagen de cada elemento particular del dominio de la función. También se puede calcular la preimagen para una imagen dada.

Conceptos Básicos

- Dominio: conjunto de salida o primer conjunto, contiene a las preimágenes. Se representa en el eje X, todos sus elementos deben estar relacionados con elementos del codominio.
- Codominio: conjunto de llegada o segundo conjunto, contiene las imágenes. Se representa en el eje Y.
- Preimagen: cada uno de los elementos del primer conjunto. Son las variables independientes.
- Imagen: elemento del codominio que está relacionado con una preimagen. Son las variables dependientes.
- Ámbito o rango: es el conjunto de imágenes. Siempre es un subconjunto del codominio.
- Criterio de asociación: es la regla que indica la relación entre las variables independientes y dependientes.
- Gráfico de una función: es el conjunto de pares ordenados que representan a una función.
- Gráfica de una función: es la representación del gráfico de la función en el plano cartesiano.

Ejemplo

Considere el diagrama adjunto y el criterio de asociación $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,6\}$ con $f(x)=2x$. Indique los conjuntos: dominio, codominio, preimágenes, imágenes, ámbito o rango.
Cordialmente

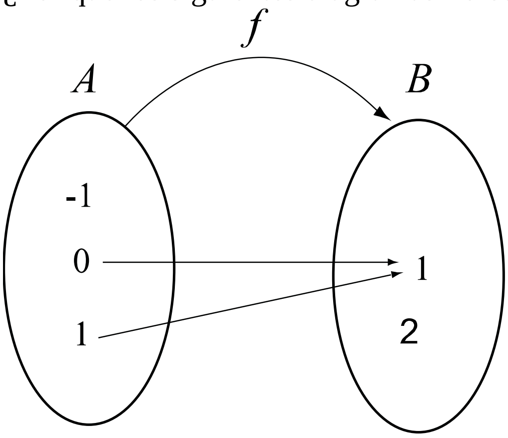


Dominio=conjunto de preimágenes: $\{1,2,3\}$

Codominio: $\{1,2,3,4,6\}$

Ámbito=rango=conjunto de imágenes$\{2,4,6\}$

Ejercicio
¿Por qué los siguientes diagramas **no** corresponden a funciones?



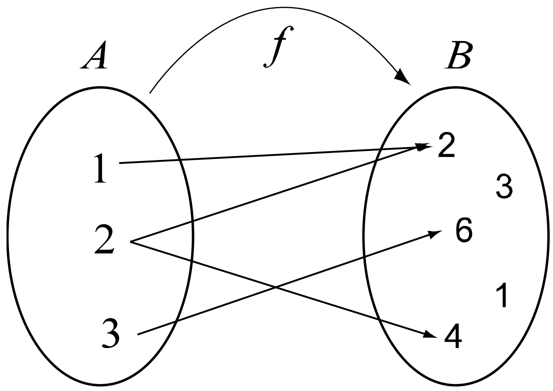


Imagen de una función

Cuando se pregunta por la imagen de un número real $"k"$ lo que se debe hacer es sustituir, en el criterio de asociación de la función, dicho valor k por la variable independiente $("x")$ y resolver la ecuación para encontrar el valor de la variable dependiente $("y")$.

Ejemplos
1. ¿Cual es la imagen de 3 en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=2x-5$?

Solución
$f(3)=2(3)-5 \Rightarrow f(3)=6-5 \Rightarrow f(3)=1$
Por lo tanto la imagen de 3 es 1

2. ¿Cual es la imagen de $2q$ en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x^2+2x-1$?

Solución
$f(2q)=(2q)^2+2(2q)-1 \Rightarrow f(2q)=4q^2+4q-1$
Por lo tanto la imagen de $2q$ es $4q^2+4q-1$

Preimagen de una función
Cuando se pregunta por la preimagen de un número real $"k"$ lo que se debe hacer es sustituir, en el criterio de asociación de la función, dicho valor k por la variable dependiente $("y" \text{ o } "f(x)")$ y resolver la ecuación para encontrar el valor de la variable independiente $("x")$.

Ejemplo
¿Cuál es la preimagen de $\sqrt{5}$ en $f:[2,+\infty[\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x-2}$?

Solución
$y=\sqrt{x-2} \Rightarrow \sqrt{5}=\sqrt{x-2} \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow 5=x-2 \ (\text{tomando } x\geq 2)$
$\Rightarrow 7=x$

Por lo tanto la preimagen de $\sqrt{5}$ es 7

Ejercicios

1. ¿Cuál(es) es(son) la(s) preimagen(es) de –24 en la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x$? R/ Las preimágenes son: 1, 2, 3 y 4.

2. Considere el criterio de asociación $f(x)=x^2-3x+2$ y calcule $f(x-1)$ y $f(2x)$. Debe factorizar en caso de que se pueda.
   R/ $f(x-1)=(x-2)(x-3)$ y $f(2x)=2(2x-1)(x-1)$

3. Considere la función $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x+1}$. Determine si existen $f(2)$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ y $f(-1)$.
   R/ $f(2)=0$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{12}$ y $f(-1)$ no pertenece al conjunto de números reales

Las funciones también pueden visualizarse en el plano cartesiano mediante su gráfica.

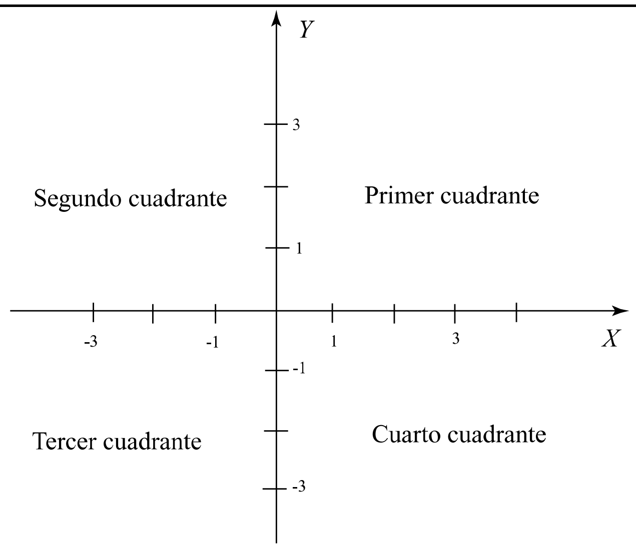
Plano cartesiano

El Plano Cartesiano, también conocido como Sistema de Coordenadas Rectangulares, está compuesto por dos rectas llamadas ejes de coordenadas. Estas dos rectas se cortan perpendicularmente, formando ángulos rectos.

En cada recta se representan los números reales y el punto de intersección de las rectas es el punto que representa al cero de cada recta. A dicho punto se le llama origen. Una de las rectas recibe el nombre de eje de las abscisas (normalmente corresponde al eje x) y a la otra recta se le llama eje de las ordenadas (normalmente corresponde al eje y).

En el Plano Cartesiano se puede hacer corresponder un par ordenado de número reales (a,b) con un punto P en el plano. En el par ordenado (a,b), a los números reales "a" y "b" se les llama coordenadas del punto P. Más específicamente, al número real "a" se le conoce como primera coordenada o abscisa de P, y al número real "b" se le conoce con el nombre de segunda coordenada u ordenada de P.

Al trazar los ejes de coordenadas, el plano cartesiano queda dividido en cuatro cuadrantes numerados en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Como muestra la siguiente figura.



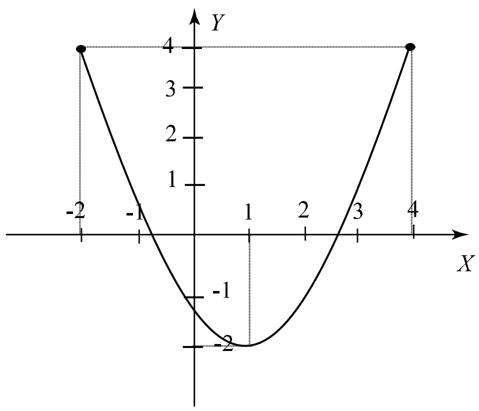
Por otra parte: De forma práctica ¿Cuándo una gráfica en el plano cartesiano representa a una función?

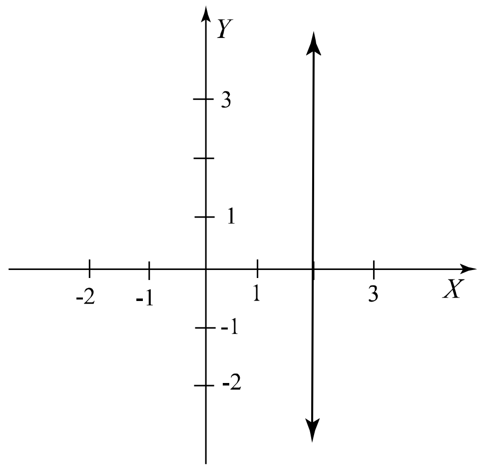
Una forma es trazar rectas paralelas al eje Y y si éstas cortan a la gráfica en dos o más puntos, entonces la gráfica **no** representa una función.

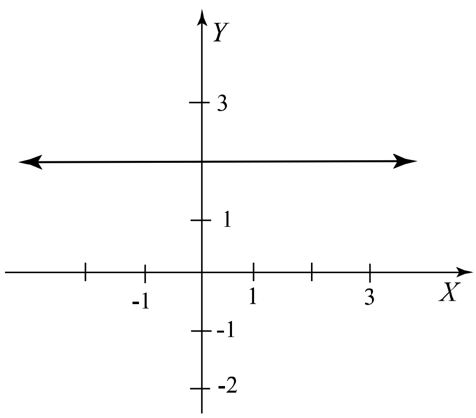
Ejercicios

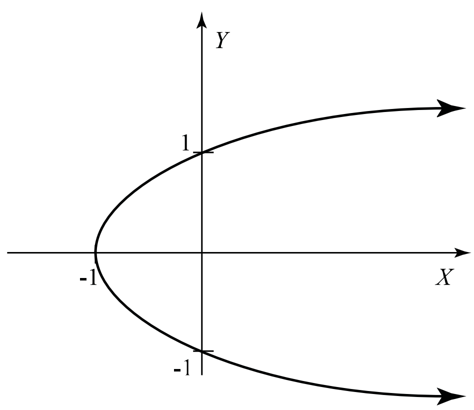
Conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Las siguientes figuras corresponden a la gráfica de alguna función f con $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$?





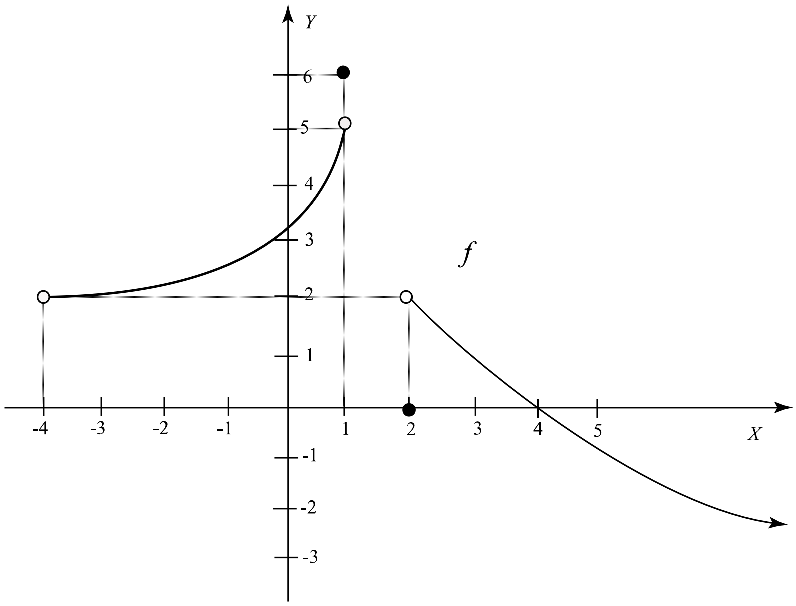




2. ¿Los siguientes gráficos representan funciones?
   a) $\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1)\}$
   b) $\{(3,1),(4,2),(5,3)\}$

Elementos de las funciones observadas en su gráfica

Considere la gráfica adjunta de una función f :



Determine:

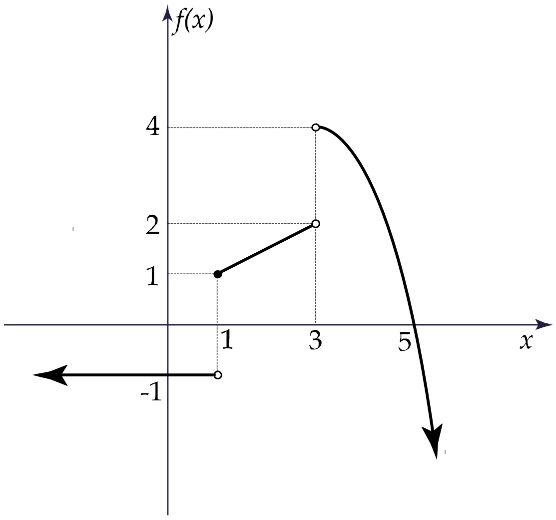
a) Dominio
b) Rango
c) Imagen de 1
d) Preimagen de 0

Discusión

a) El dominio de la función debe leerse en el eje de las X, por tanto sería el conjunto $]-4,1]\cup[2,+\infty[$.
b) El rango debe observarse en el eje Y, en este caso sería $]-\infty,2[\cup]2,5[\cup\{6\}$.
c) La imagen de uno se puede representar como $f(1)$, la cual sería 6; esto es $f(1)=6$.
d) Para encontrar la preimagen de 0, se debe preguntar para que valores de x, la imagen de la función se hace cero, en este caso tanto $x=2$ como $x=4$ cumplen con esta condición.

Ejercicio

Con base en la gráfica adjunta, determine:



a) $f(-2.5)$

b) Imagen de 1

c) Imagen de -5

d) Ámbito de f

e) Dominio de f

f) Preimagen de 0

g) ¿Cuántas preimágenes tiene 1,5?

Dominio real de una función

El dominio real de una función indica el conjunto de valores para los cuales la función está definida; el dominio real siempre se calcula para las variables independientes.

Para determinar el dominio real de una función real de variable real se sigue de la siguiente manera:

$$D_f = \{\ x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\},\ luego\ \ sea\ x \in \mathbb{R},\ \ x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \mathbb{R}$$

Veremos a continuación como se calcula el dominio real de distintos tipos de funciones, dada la función de manera algebraica.

Funciones lineales, polinomiales y valores absolutos (expresiones en el denominador) Tienen dominio real igual a $\mathbb{R}$.

Función fraccionaria

Su dominio real es igual a $\mathbb{R} - \{\text{los números que anulan el denominador}\}$.

Ejemplo

Determinar el dominio real de la función $g : D \to \mathbb{R};\ g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Solución

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2 \wedge x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

Por lo tanto

$$D_g = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

Ejercicios

Considere la función $f : D \to \mathbb{R}$, determine el dominio (D) en cada caso:

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ R/ $D=\mathbb{R}-\{0\}$
2. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-1}$ R/ $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$
3. $f(x)=\dfrac{4x}{x^3-x}$ R/ $D=\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$
4. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ R/ $D=\mathbb{R}$
5. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-12}$ R/ $D=\mathbb{R}-\{-4,3\}$

Función con radicales

Si el índice del radical es impar entonces el dominio real de la función es $\mathbb{R}$.

Si el índice del radical es par entonces el dominio real de la función es el conjunto de los números reales que hacen que el subradical sea positivo o cero.

Ejemplos

1. Determinar el dominio real de la función $f : D \to \mathbb{R};\ f(x)=\sqrt{3-2x}$

Solución

$$\sqrt{3-2x}\in\mathbb{R} \iff 3-2x \geq 0 \iff \frac{3}{2}\geq x \iff x\in \left]-\infty,\ \frac{3}{2}\right]$$

Por lo tanto

$$D_f=\left]-\infty,\ \frac{3}{2}\right]$$

2. Determinar el dominio real de la función $f : D \to \mathbb{R};\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$

Solución

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\in IR \iff x+2>0 \wedge 4-x>0 \iff x>-2 \wedge 4>x \iff$$
$$x\in\left]-2,\ 4\right[$$

Por lo tanto

$$D_f=\left]-2,\ 4\right[$$

Ejercicios

Considere cada función $f: D \to \mathbb{R}$, determine el dominio (D) en cada caso:

1. $f(x) = \sqrt[5]{3-2x}$ R/ $D = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$ R/ $D = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \sqrt{x-3}$ R/ $D = [3, +\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x-3}}$ R/ $D =]3, +\infty[$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ R/ $D = \mathbb{R}^+$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ R/ $D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty]$
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ $D = [\ 0,1[$
8. $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ R/ $D =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$
9. $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$ R/ $D =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$
10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x+5}$ R/ $D =]-\infty, -5[\cup]-5, -2] \cup [1, +\infty[$

Expresiones combinadas

Ejemplo

Determine el dominio real de la función f definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{-2x^2+7x-3}$

$$\begin{array}{ll} 3-x \geq 0 & -2x^2+7x-3 \neq 0 \\ -x \geq -3 & (x-3)(2x-1) \neq 0 \\ x \leq 3 & x \neq 3 \quad x \neq \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$D_f =]-\infty, 3[- \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Ámbito o rango de una función

El ámbito o rango de una función es el subconjunto del codominio formado por las imágenes de los elementos del dominio.

Definición

Sea $f: A \to B$ una función, al subconjunto de B formado por todos los elementos que son imagen de algún elemento de A se le llama ámbito o rango de f y se denota por $f(A)$.

Ejemplos

1. Si $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g(n) = 3n$, entonces el rango es $g(\mathbb{N}) = \{3, 6, 9, 12, ...\}$

2. Sea $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x-3}{x-2}$

Sabemos que

$$y = \frac{x-3}{x-2} \Rightarrow y(x-2) = x-3$$
$$\Rightarrow yx - 2y = x - 3 \Rightarrow yx - x = 2y - 3$$
$$\Rightarrow x(y-1) = 2y - 3 \Rightarrow x = \frac{2y-3}{y-1}$$

Por tanto $y \in \mathbb{R} - \{1\}$; esto es el rango de la función es el conjunto $f(\mathbb{R} - \{2\}) = \mathbb{R} - \{1\}$

3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$

Consideramos dos casos:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$, por lo tanto $y \in [1, +\infty[$

b) $y = x^2 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-1} = x$

Ahora la expresión $\sqrt{y-1}$ tiene sentido en el conjunto de los números reales si $y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow y \in [1, +\infty[$

De a) y b) se puede concluir que $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

4. Sea $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x-1}$

Consideramos dos casos:

a) $f(x) = \sqrt{x-1} \geq 0, \forall\, x \in [1, +\infty[$, lo que indica que $y \in [0, +\infty[$

b) $y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x - 1 \Rightarrow y^2 + 1 = x$, lo cual no evidencia otra restricción para y

De a) y b) el ámbito de la función es $[0, +\infty[$

5. Sea $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Consideramos dos casos:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, lo que indica que $y \in [0, +\infty[$

b) $y=\sqrt{x^2+4} \Rightarrow y^2=x^2+4 \Rightarrow \pm\sqrt{y^2-4}=x$, por lo tanto para que la expresión $\sqrt{y^2-4}$ tenga sentido en el conjunto de los números reales $y^2-4\geq 0 \Rightarrow (y-2)(y+2)\geq 0$

Tabla de signos

	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$y+2$	-	+	+	
$y-2$	-	-	+	
Signo	+	-	+	

$y\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

Ahora de a) y b) $y\in\left[0,+\infty\right[$ y $y\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$ por lo tanto se hace la intersección e ambos conjuntos, concluyendo que el ámbito de la función es $\left[2,+\infty\right[$

Ejercicios

a) Determine el ámbito de las siguientes funciones:

1. $h:\mathbb{R}-\{-1\}\rightarrow\mathbb{R}$ con $h(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$
2. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=|1-2x|+6$
3. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Tipos particulares de funciones

Función polinómica

Son las funciones que tienen la forma de un polinomio. Es decir, son de la forma $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_o$, generalmente con $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$.

Ejemplos

1. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=7x^6-4x^5+x^4-2x^3+x^2-1$ es una función polinómica de grado igual a 6.

2. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ con $f(x)=3x^2+2$ es una función polinómica de grado igual a 2.

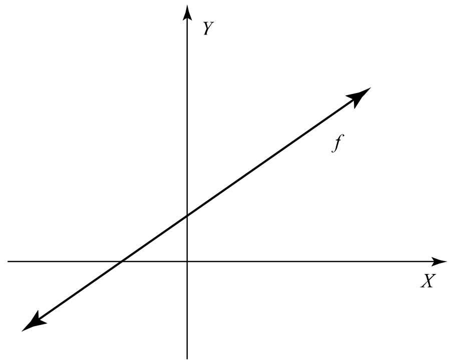
Función lineal

Es una función polinómica que tiene grado igual a uno; $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, el criterio de asociación se representa mediante la ecuación $f(x)=mx+b;$ con $m,b\in\mathbb{R}$ y $m\neq 0$, su grafica es una línea recta, "m" recibe el nombre de pendiente de la recta y "b" es la intersección con el eje de las ordenadas (eje Y).

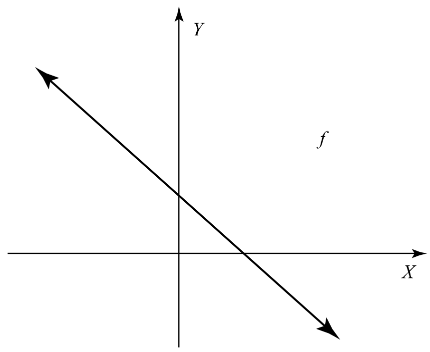
Si se tienen dos pares ordenados (x_1, y_1), (x_2, y_2) entonces la pendiente de la recta que contiene dichos puntos, se calcula como $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; además, de $f(x) = mx + b$ se deduce que $b = y - mx$.

Las siguientes figuras muestran como se representan las rectas, dependiendo del valor que tome su pendiente.

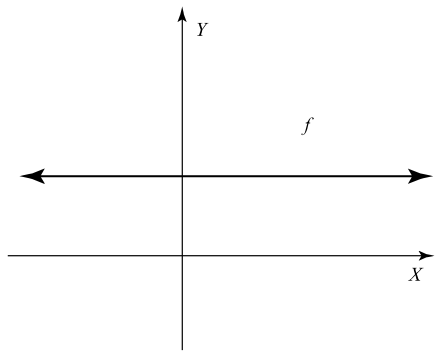
$\rightarrow$ Pendiente positiva $(m > 0)$, función creciente



$\rightarrow$ Pendiente negativa $(m < 0)$, función decreciente



$\rightarrow$ Pendiente igual a cero $(m = 0)$, función constante



Intersecciones de una recta con los ejes de coordenadas

Si la ecuación de la recta está expresada en su forma pendiente-intersección; es decir, $y = mx + b$ entonces los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas son los siguientes:

- $(0, y) = (0, b)$ es el punto de intersección de una recta con el eje de las ordenadas.
- $(x, 0) = \left(-\frac{b}{m}, 0\right)$ es el punto de intersección de una recta con el eje de las abscisas.

Ejercicios

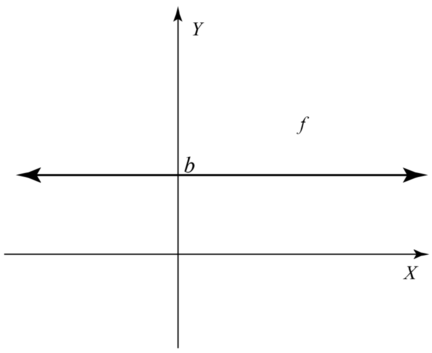
1. Encuentre la función lineal a la cual le pertenecen los puntos (3, 7) y (1, 3).
   R/ $f(x) = 2x + 1$

2. Encuentre los puntos de intersección, de la función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ con los ejes de coordenadas.
   R/ con el eje de las abscisas es $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y con el eje de las ordenadas es $(0, 1)$

3. Trace el esbozo de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$.

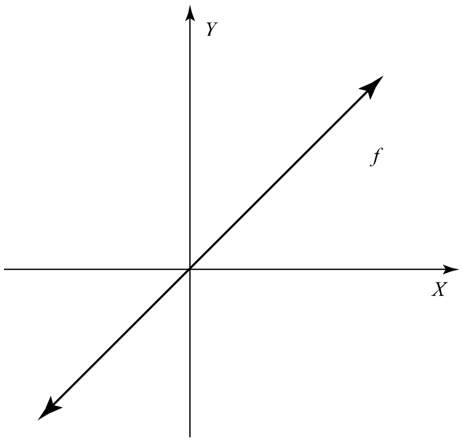
Función constante

Es una función lineal con pendiente igual a cero. Su criterio de asociación es $f(x) = b,$ con $b \in \mathbb{R}$ y su gráfica es una recta paralela al eje X. En esta función todos los elementos del dominio tienen la misma imagen, es decir, todos los puntos de la recta son de la forma (x, b).



Función Identidad

Es una función lineal con pendiente igual a uno. Su criterio de asociación es $f(x) = x \ \forall x, \ x \in \mathbb{R}$. Su gráfica es una recta que forma un ángulo de 45º con respecto al eje X. Todos los puntos de la recta son de la forma (x, x), es decir, las preimágenes son iguales a las imágenes.



Notas:

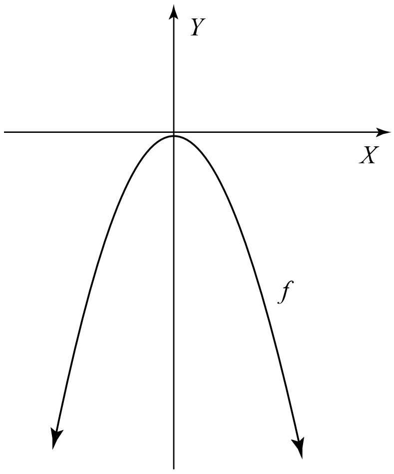
- La función constante es lineal con $m = 0$
- La función identidad es lineal con $m = 1$ y $b = 0$

Función cuadrática

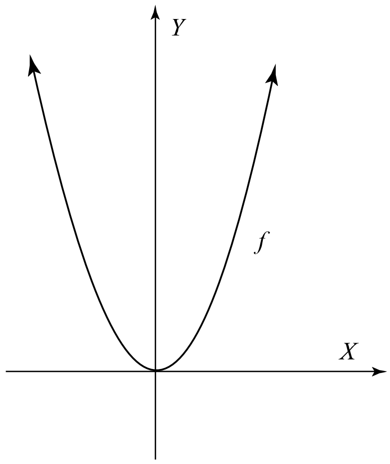
El criterio de asociación de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c;\ \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$; **s**u gráfica es una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo.

La concavidad se determina por el valor que tome el coeficiente a; esto es:

a) si $a < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo



b) si $a > 0$, entonces la parábola es cóncava hacia arriba .



Características de la función cuadrática

Intersección con los ejes de coordenadas

$(0,c)$ es el punto de intersección de la parábola con el eje de las ordenadas.

$(x_1, 0)$ o $(x_2, 0)$ es(son) el(los) punto(s) de intersección de la parábola con el eje de las abscisas.

Para saber si una función cuadrática corta al eje de las abscisas en uno, dos o en ningún punto, se debe analizar el discriminante de la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, entonces la gráfica de la función f corta al eje X en dos puntos diferentes.
- Si $\Delta = 0$, entonces la gráfica de la función f corta al eje X en solo un punto (o en dos puntos iguales).
- Si $\Delta < 0$, entonces la gráfica de la función f no corta al eje X.

Vértice de la función cuadrática

Es el punto máximo o el punto mínimo de la función. Está dado por el par ordenado $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

- Si $a > 0$ entonces el vértice es el punto mínimo.
- Si $a < 0$ entonces el vértice es el punto máximo.
- Si en una función cuadrática el $\Delta = 0$, entonces el punto que representa al vértice también es el punto de intersección de la parábola con el eje X.

- Si en una función cuadrática $b=0$, entonces el punto vértice es $(0,c)$. Es decir, el vértice es el punto de intersección de la parábola con el eje Y.

Dominio de la función cuadrática

El dominio real de la función cuadrática es $\mathbb{R}$.

Ámbito o rango de la función cuadrática

- Si $a<0$ entonces $A=\left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$
- Si $a>0$ entonces $A=\left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$

Intervalos de monotonía de la función cuadrática

- Si $a<0$ entonces $f\searrow: \left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ y $f\nearrow: \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$
- Si $a>0$ entonces $f\searrow: \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[$ y $f\nearrow: \left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$

Eje de simetría de la función cuadrática

Es la recta paralela al eje Y que divide la parábola a la mitad. Su ecuación es $x=\frac{-b}{2a}$, esto es, la abscisa del vértice de la parábola.

Gráfica de la función cuadrática

Para graficar una función cuadrática, lo más conveniente es hacer la siguiente tabla de valores. Luego se ubican los puntos en el plano cartesiano y se traza la gráfica.

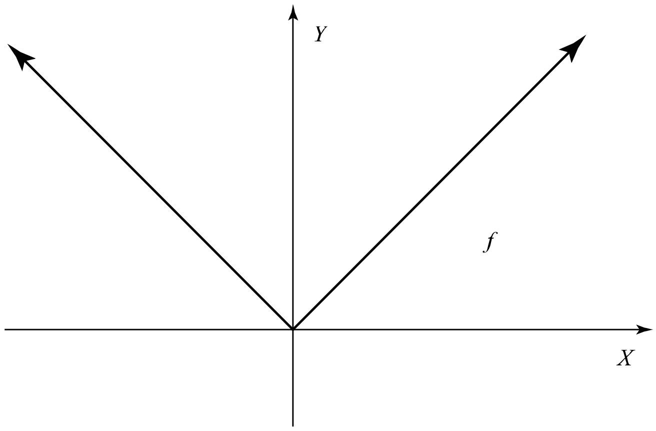
x	$f(x)$	
0	c	Intersección con el eje Y
x_1	0	Intersección con el eje X
x_2	0	
$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-\Delta}{4a}$	Punto del vértice
$2\left(\frac{-b}{2a}\right)$	c	Punto equidistante de la intersección con el eje Y

Función valor absoluto: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=|x|$

Lo primero sería recordar la definición de valor absoluto, la cual indica que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La función valor absoluto tiene como dominio el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) y su ámbito es $\left[0, +\infty\right[$, su gráfica contiene a los puntos (x, x) si $x \geq 0$ y a los pares ordenados $(x, -x)$ si $x < 0$. Se adjunta la representación gráfica.



- **Función parte entera**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = [\![x]\!]$

Lo primero es recordar cómo se obtiene la parte entera de un número real. Si x representa un número real, se define la función $f(x) = [\![x]\!] = n$; donde n es el mayor entero tal que $x \geq n$.

Ejemplos

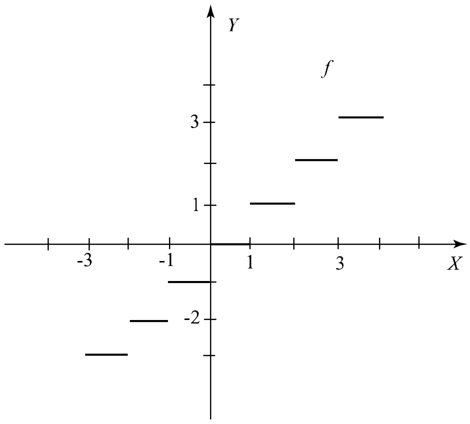
$[\![0.5]\!] = 0$

$[\![1.8]\!] = 1$

$[\![-3]\!] = -3$

$[\![-\sqrt{3}]\!] = -2$

El dominio dicha función es $\mathbb{R}$, su ámbito son los números enteros y su gráfica se adjunta a continuación.

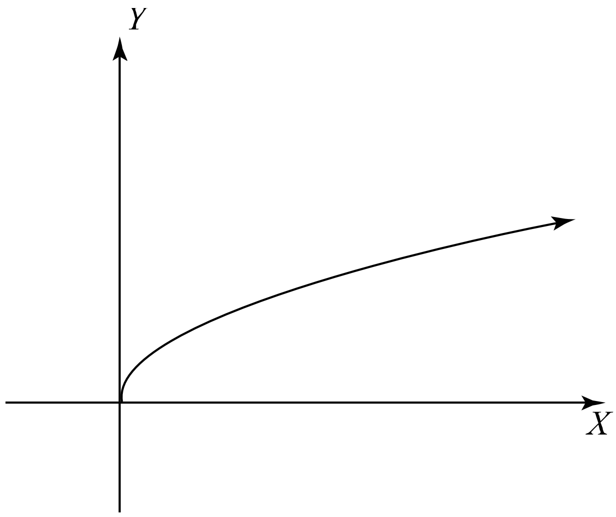


Ejercicios

1. Grafique la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=[\![x-3]\!]$
2. Grafique la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=[\![x]\!]-3$
3. Grafique la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=-[\![-x]\!]$

- **Función raíz cuadrada**

Sea $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ tal que $f(x)=\sqrt{x}$. Dicha función recibe el nombre de raíz cuadrada y un esbozo de su representación gráfica se adjunta.



Representación gráfica de funciones

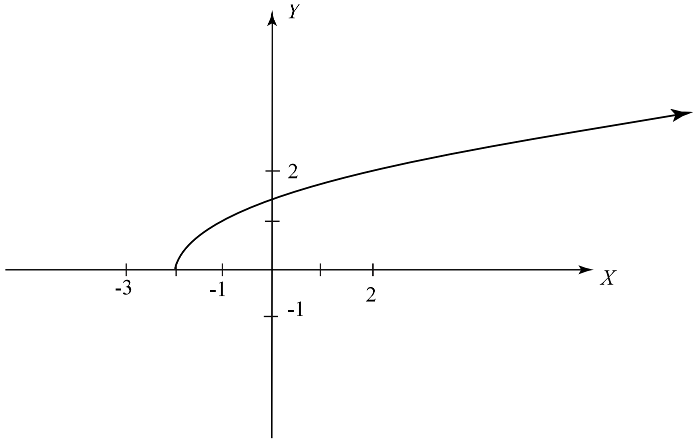
Para graficar una función se puede hacer un cuadro de valores x y y, tomando para x un intervalo en el dominio de la función y calculando las imágenes para cada valor x.

Ejemplos

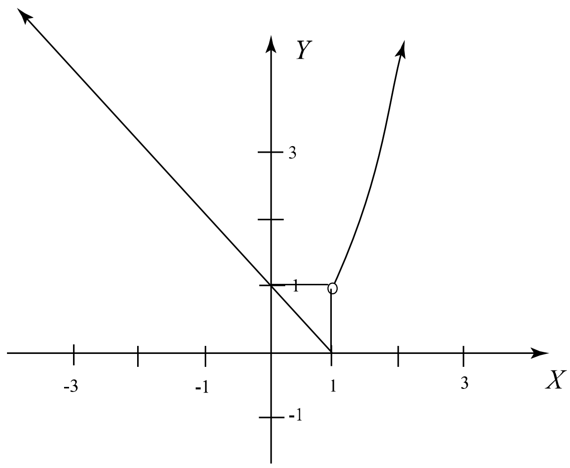
1. Grafique la función $f:[-2,+\infty[\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x+2}$

Solución

x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	$\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3}$
2	2
3	$\sqrt{5}$
4	$\sqrt{6}$



2. Grafique la función $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{si } x\le 1\\ x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$



Ejercicio

Grafique la función $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{si } x\ge 5\\ -x^2-3 & \text{si } x<5\end{cases}$ e indique:

a) El dominio real de la función
b) La imagen de -7
c) La imagen de 30
d) La imagen de 0
e) La imagen de 5
f) La preimagen de 0

g) La preimagen de 1
h) La preimagen de 2
i) La preimagen de 6
j) La imagen de 13

Transformación de funciones

Otra manera de realizar la representación gráfica de una función es haciendo uso de las transformaciones (traslaciones, horizontales o verticales; reflexiones en los ejes x e y, dilataciones y modulaciones) de ciertas funciones conocidas. Para usar esta forma se deben memorizar las gráficas de ciertas funciones elementales, un resumen de estas se encuentra en los anexos de esta unidad didáctica.

Traslaciones

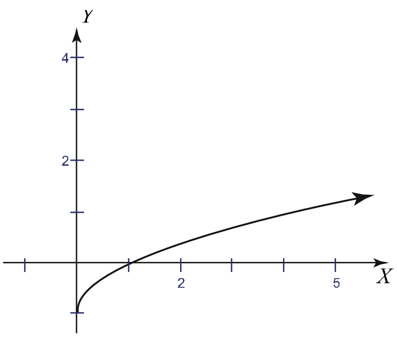
h) Traslaciones en el eje y

Sea f una función elemental simple, entonces la gráfica de una función g es una traslación en el eje y de la gráfica de la función f, si:

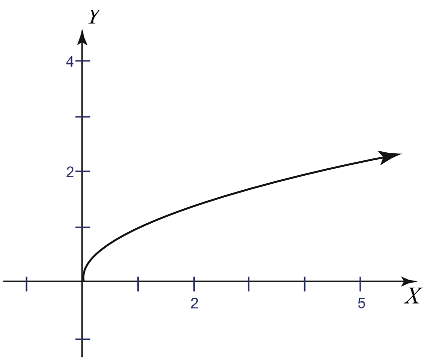
✓ $g(x) = f(x) + c$, donde $c \in \mathbb{R}^+$. La gráfica de la función g se representa como una traslación vertical de c unidades hacia arriba de la gráfica de la función f.

✓ $g(x) = f(x) - c$, donde $c \in \mathbb{R}^+$. La gráfica de la función g se representa como una traslación vertical de c unidades hacia abajo de la gráfica de la función f.

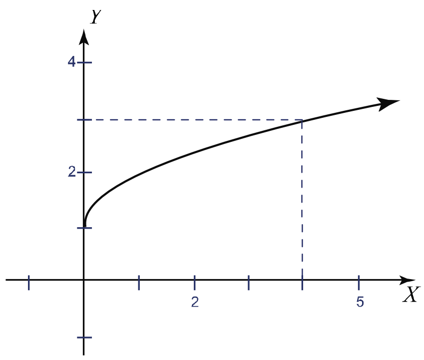
Ejemplos



$f(x) = -1 + \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt{x}$



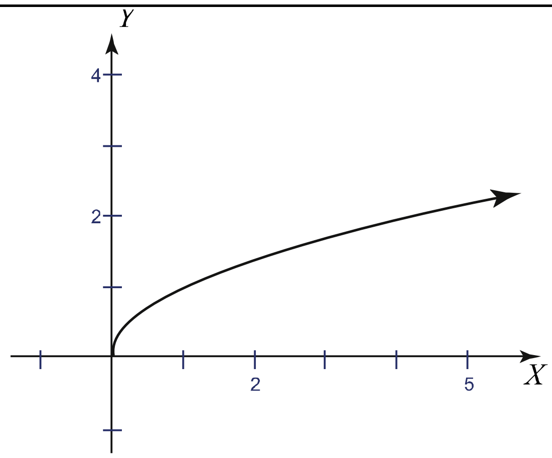
$f(x) = 1 + \sqrt{x}$

i) Traslaciones en el eje x

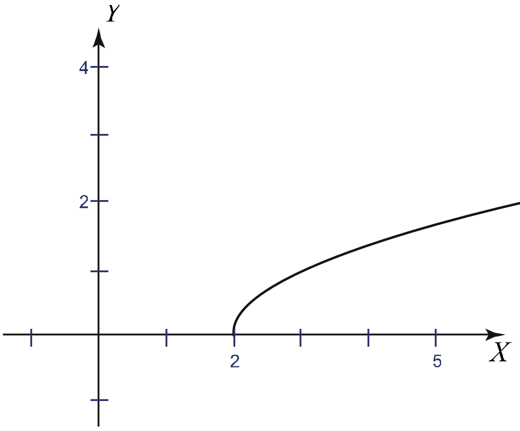
Sea f una función elemental simple, entonces la gráfica de una función g es una traslación en el eje x de la gráfica de la función f, si:

✓ $g(x) = f(x - c)$, donde $c \in \mathbb{R}^+$. La gráfica de la función g se representa como una traslación horizontal de c unidades hacia la derecha de la gráfica de la función f.

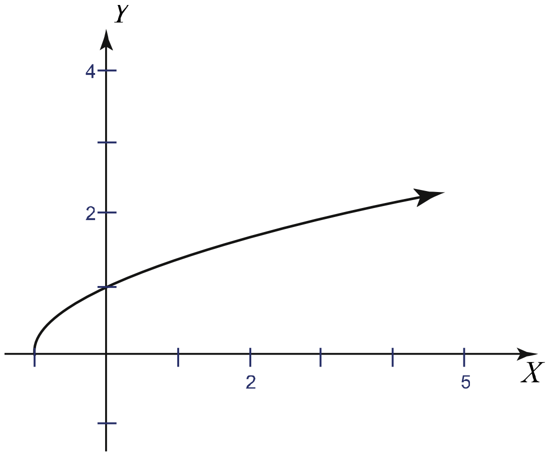
✓ $g(x) = f(x + c)$, donde $c \in \mathbb{R}^+$. La gráfica de la función g se representa como una traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda de la gráfica de la función f.



$f(x)=\sqrt{x}$



$g(x)=f(x-2)=\sqrt{x-2}$



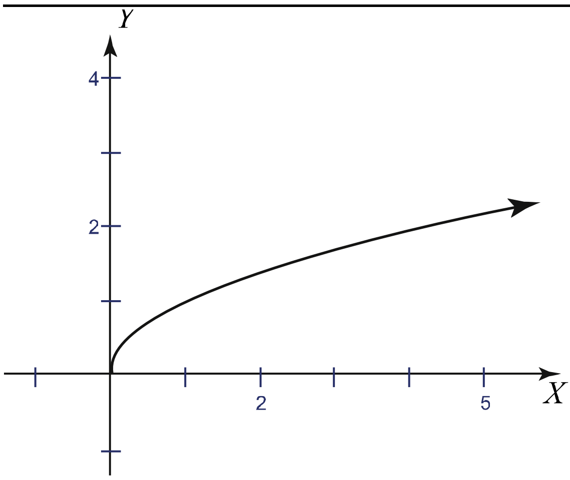
$g(x)=f(x+1)=\sqrt{x+1}$

Reflexiones

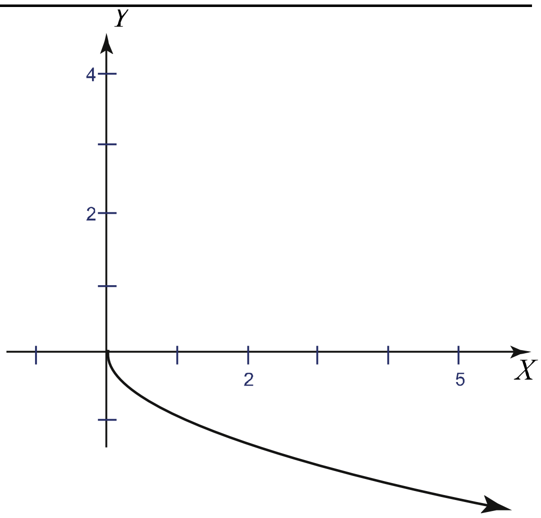
Reflexión en el eje x

La reflexión de una función f en el eje x es una función g, tal que $g(x)=-f(x)$. La función g tiene una imagen de *espejo* respecto al eje x.

Ejemplo



$f(x)=\sqrt{x}$

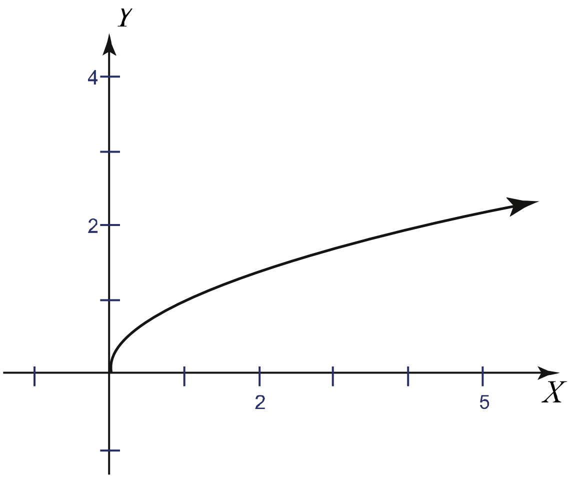


$g(x)=-\sqrt{x}=-f(x)$

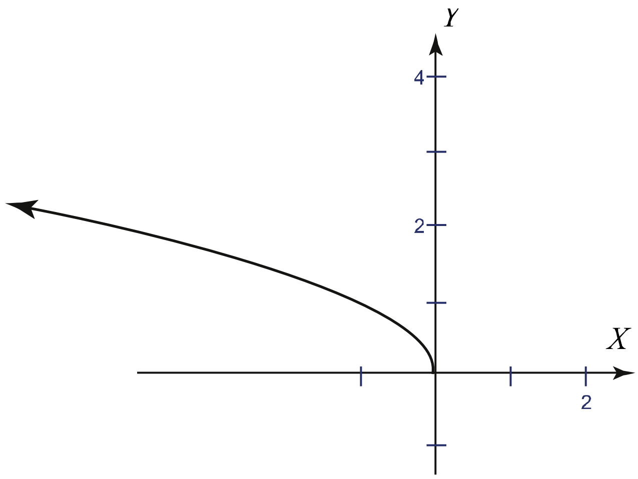
Reflexión en el eje y

La reflexión de una función f en el eje y es una función g, tal que $g(x)=f(-x)$. La función g tiene una imagen de *espejo* respecto al eje y.

Ejemplo



$f(x)=\sqrt{x}$



$g(x)=\sqrt{-x}=f(-x)$

***

Modulación

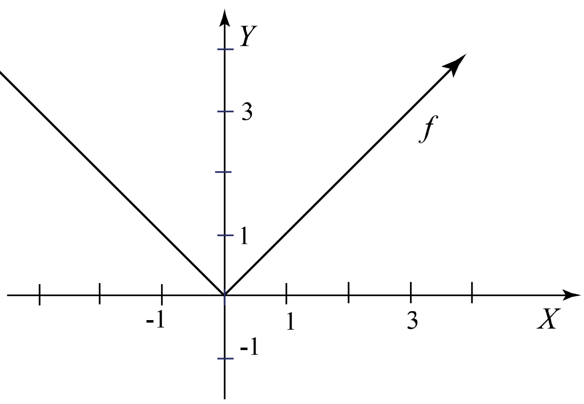
El proceso de modulación de la gráfica de una función es el estiramiento (elongación) o contracción horizontales de la gráfica de la función. Sea f una función elemental simple, $a>1$ y $a\neq 1$; la modulación de f se representa en la función $g(x)=f(ax)$, tal que

a) $a > 1$, entonces la gráfica de la función g presenta una contracción horizontal de la función f por el factor $\frac{1}{a}$.

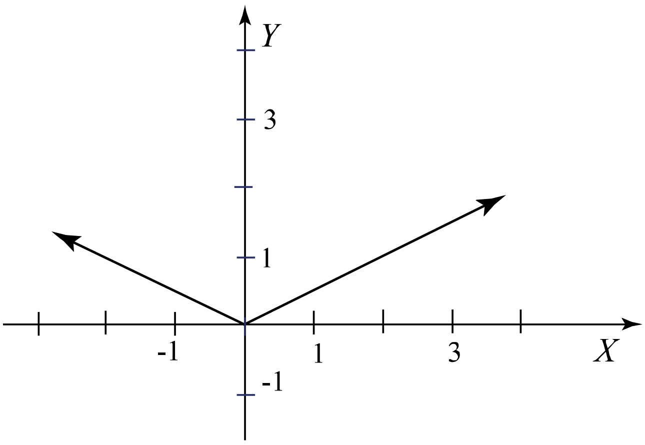
b) $0 < a < 1$, entonces la gráfica de la función g presenta una elongación horizontal de la función f por el factor $\frac{1}{a}$.

En el proceso de modulación, los valores en el eje y no varían, solamente los valores en el eje x.

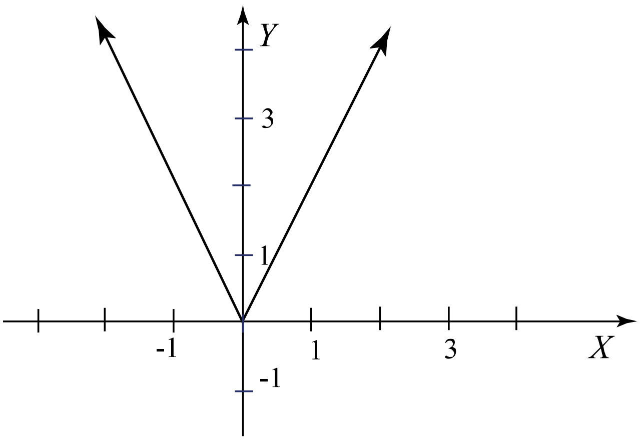
Ejemplos



$f(x) = |x|$



$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left|\frac{1}{2}x\right|$



$g(x) = f(2x) = |2x|$

Dilatación

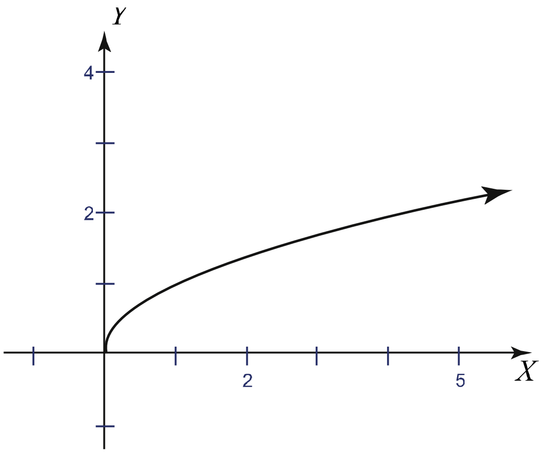
El proceso de dilatación de la gráfica de una función es el estiramiento (elongación) o contracción () vertical de la gráfica de la función. Sea f una función elemental simple, $a > 1$y $a \neq 1$; la modulación de f se representa en la función $g(x) = a \cdot f(x)$, tal que

c) $a > 1$, entonces la gráfica de la función g presenta una elongación vertical de la función f por el factor a.

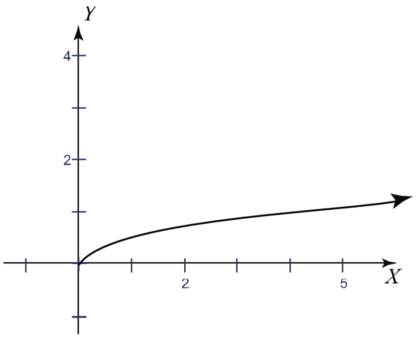
d) $0 < a < 1$, entonces la gráfica de la función g presenta una contracción vertical de la función f por el factor a.

En el proceso de modulación, los valores en el eje x no varían, solamente los valores en el eje y.

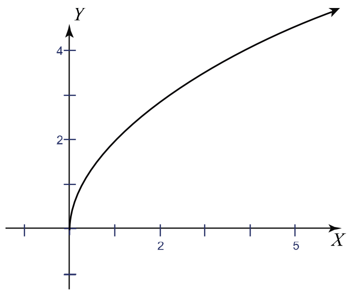
Ejemplos



$f(x)=\sqrt{x}$



$g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$



$g(x)=2f(x)=2\sqrt{x}$

Nota: Pueden darse trasformaciones múltiples en la gráfica de una función elemental simple.

Ejercicios

Grafique las siguientes funciones:

1. $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $h(x)=1-|-x+2|$
2. $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $m(x)=-3+2|x-1|$
3. $f:[-2,+\infty[\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{x+2}$

Paridad

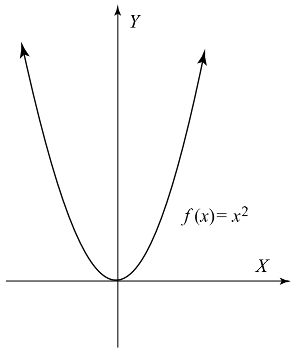
Función par

Si una función f satisface la condición: $f(-x)=f(x)$ para todo x de su dominio entonces f se llama función par.

Ejemplo

$f(x)=x^2$ es par, pues $f(-x)=(-x^2)=x^2=f(x)$.

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica respecto al eje Y, es decir, si trazamos la gráfica de f para $x\geq 0$, la gráfica completa se obtiene efectuando una reflexión con respecto al eje Y (véase figura adjunta).



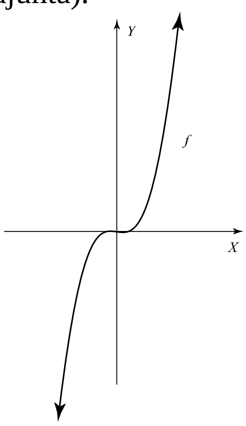
Función impar

Si una función f satisface la condición $f(-x)=-f(x)$ para todo x de su dominio entonces f se llama función impar.

Ejemplo

$f(x)=x^3$ es impar, puesto que $f(-x)=(-x^3)=-x^3=-f(x)$.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen. Si tenemos la gráfica de f para $x\geq 0$; podemos obtener la gráfica completa realizando un giro de 180º respecto al origen. (véase figura adjunta).



Ejercicio

1. Indique si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de ellas.

   a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x+1$ R/ Ni par ni impar

   b. $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ R/ Impar

2. Verifique que la función $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x^2-\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{1-x}$ es una función par.

Clasificación de funciones

Función sobreyectiva

Es aquella función en la cual el ámbito es igual al codominio; esto quiere decir que no sobran elementos en el codominio de la función. Otra forma de definir una función sobreyectiva es la siguiente:

Sea $f:A\to B$ una función cualquiera; se dice que f es sobreyectiva si para cualquier valor y en B existe un valor x en A tal que $y=f(x)$.

Ejemplo

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ con $f(x)=\sqrt{x}$, determine si es sobreyectiva.

Por la definición dada de la función su codominio es $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, ahora se debe obtener el ámbito de la misma.

I. $y=\sqrt{x}$, por tanto y es un número positivo o cero; esto es $y\in[0,+\infty[=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$

II. $y=\sqrt{x}\Rightarrow y^2=x$
Para cualquier valor de y la expresión estaría bien definida

De I y II se puede concluir que el ámbito de la función es $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.
Por tanto f es sobreyectiva.

Función inyectiva

Es aquella función que cumple con que cada imagen tiene sólo una preimagen. En estos casos, por lo general se dice que la función va de uno a uno.

Otra forma de definir una función inyectiva es la siguiente:

Sea $f:A\to B$ una función cualquiera; se dice que f es inyectiva si para cualesquiera dos elementos $(x_1\ y\,x_2)$ de A, tal que $x_1\neq x_2$, se obtiene que $f(x_1)\neq f(x_2)$; esto quiere decir que una función es inyectiva si valores distintos en el dominio producen valores distintos en el codominio y por lo tanto nunca se repetirán las imágenes.

También se puede definir de la siguiente manera:

Sea $f : A \to B$ una función. Se dice que f es una función inyectiva sii

$$\forall x, y \in A \ tq \ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Ejemplo

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = \sqrt{x}$, determine si es inyectiva.

Consideremos que

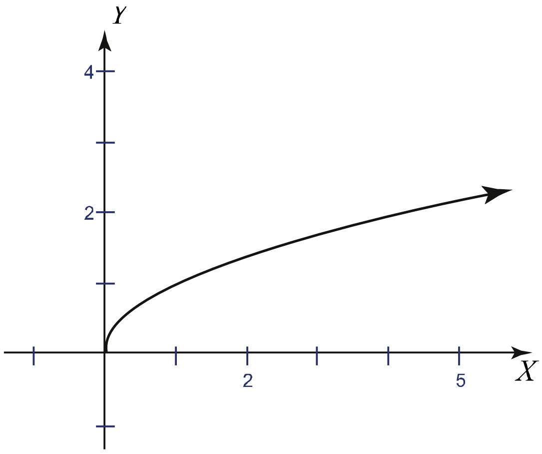
$f(x) = f(y) \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$. Por tanto f es inyectiva

Nota

Una forma práctica para saber si la gráfica de una función representa una función inyectiva es trazar rectas paralelas al eje X y si éstas cortan a la gráfica en dos o más puntos entonces se dice que la función no es inyectiva.

Función biyectiva

Si la función es sobreyectiva e inyectiva a la vez; es decir, no sobran elementos en el codominio y además, la función va de un a uno. Un ejemplo de función biyectiva sería $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = \sqrt{x}$, ya que anteriormente se probó que es inyectiva y sobreyectiva.



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = \sqrt{x}$

En la gráfica de la función se puede notar que el ámbito es igual al codominio dado y si se pasan líneas paralelas al eje X, estas líneas solo cortan en un punto a la gráfica de la función.

Funciones monótonas (crecientes y decrecientes)

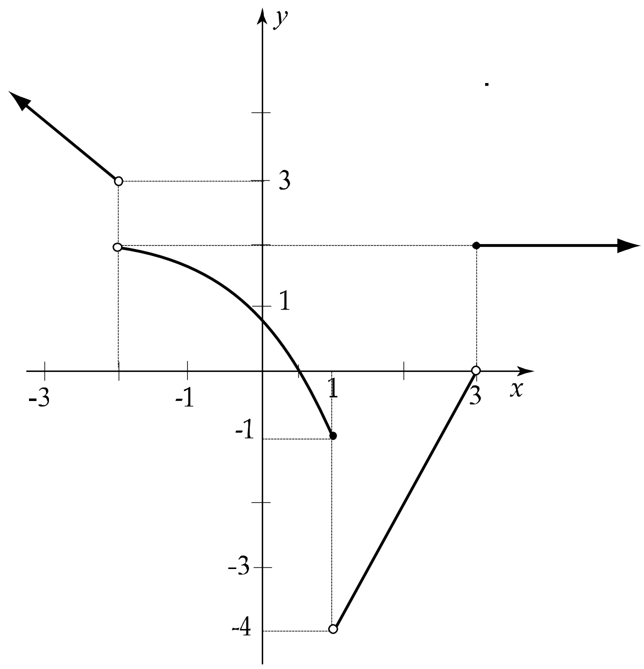
Definición

Sea $f: I \to \mathbb{R}$

- Se dice que una función es creciente si $\forall a, b \in I \left(a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \right)$
- Se dice que una función es estrictamente creciente si
$$\forall a, b \in I \left(a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \right)$$
- Se dice que una función es decreciente si $\forall a, b \in I \left(a < b \Rightarrow f(b) \leq f(a) \right)$.
- Se dice que una función es estrictamente decreciente si
$$\forall a, b \in I \left(a < b \Rightarrow f(b) < f(a) \right)$$

Ejemplos

1. Observe la gráfica adjunta



Basados en la función representada se puede decir que:

La función es creciente en $\left]-1,3\right[$ y en $\left]3,+\infty\right[$.

La función es estrictamente creciente en $\left]-1,3\right[$.

La función es decreciente en $\left]-\infty,-2\right[$ y en $\left]-2,1\right[$.

La función es estrictamente decreciente en $\left]-\infty,-2\right[$ y en $\left]-2,1\right[$.

2. Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -3x + 1$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$; $x < y \Rightarrow -3x > -3y \Rightarrow -3x + 1 > -3y + 1 \Rightarrow f(x) > f(y)$; por tanto la función es estrictamente decreciente.

3. Dada la función $f:\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ con $f\left(x\right)=x^2$.

$\forall\, x,y\in\mathbb{R}^-$; $x<y \Rightarrow \underset{x,y\in\mathbb{R}^-}{x^2>y^2} \Rightarrow f\left(x\right)>f\left(y\right)$; por tanto la función es estrictamente decreciente en el dominio dado.

Función inversa

Toda función biyectiva f tiene inversa, denotada por f^{-1} (que también es biyectiva) la cual tiene por dominio el codominio de la función f y por codominio el dominio de la función original f.

Es decir, si $f:\ A\to B$ entonces $f^{1}:B\to A$. Para encontrar la función inversa se iguala la función a "y" y se despeja de la ecuación la "x"; luego se cambia la "y" por "x" y la "x" por $f^{-1}(x)$.

Ejemplos

Encuentre la función inversa de las siguientes funciones dadas e indique el dominio y codominio de la inversa. Además grafique ambas funciones.

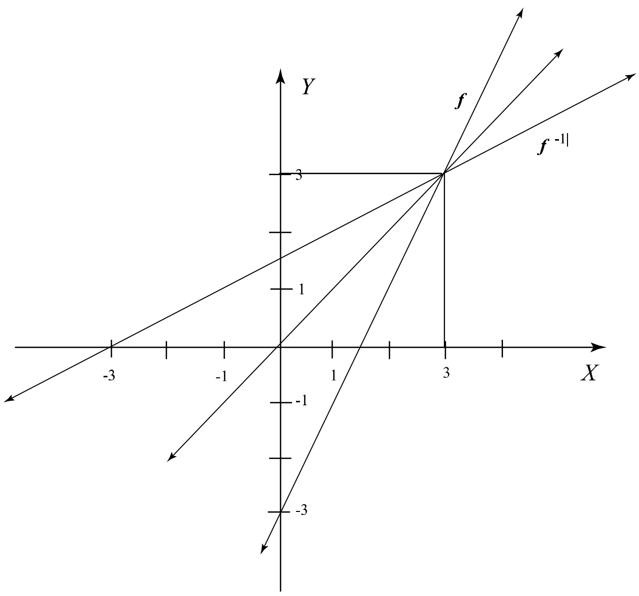
1. $f(x)=2x-3;\quad f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Solución

$$f(x)=2x-3$$

$$y=2x-3 \Rightarrow y+3=2x$$

$$\frac{y+3}{2}=x \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2},\ f^{-1}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

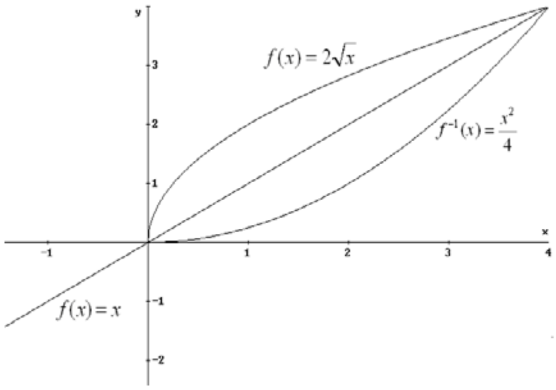


2. $f(x)=2\sqrt{x};\quad f:\,[0,+\infty[\;\to\;[0,+\infty[$

Solución

$$y=2\sqrt{x}\Rightarrow \frac{y}{2}=\sqrt{x}\;\Rightarrow\;\left(\frac{y}{2}\right)^2=|x|\;\Rightarrow\;\left(\frac{y}{2}\right)^2=x\;\text{ (por el dominio de } f\text{)}$$

$$\Rightarrow\;\frac{y^2}{4}=x\;\Rightarrow\; f^{-1}(x)=\frac{x^2}{4};\quad f^{-1}:\,[0,\;+\infty[\to[0,\;+\infty[$$



3. $f(x)=x^2-3;\quad f:\,[0,+\infty[\to[-3,+\infty[$

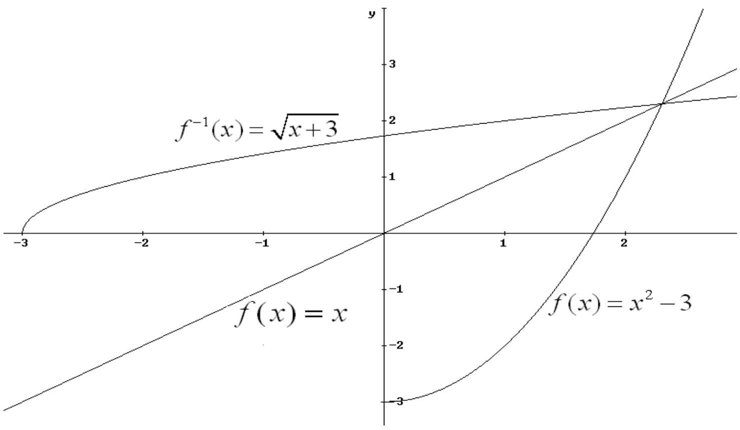
Solución

$f(x)=x^2-3;\quad f:\,[0,+\infty[\to[-3,+\infty[$

$y=x^2-3\;\Rightarrow\; y+3=x^2$

$\pm\sqrt{y+3}=x$ (como el dominio de f será el ámbito de f^{-1} se descarta la función negativa)

$\Rightarrow\; f^{-1}(x)=\sqrt{x+3};\quad f^{-1}:[-3,+\infty[\to[0,+\infty[$



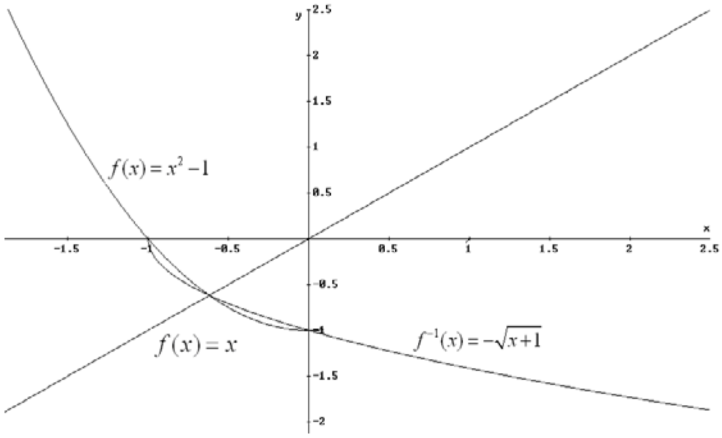
4. $f(x)=x^2-1; \quad f: \left]-\infty,0\right] \to \left[-1,+\infty\right[$

Solución

$f(x)=x^2-1; \quad f: \left]-\infty, 0\right] \to \left[-1, +\infty\right[$

$y=x^2-1 \;\Rightarrow\; y+1=x^2 \;\Rightarrow\; \pm\sqrt{y+1}=x$

(como el dominio de f será el ámbito de f^{-1} y éste es $\left]-\infty, 0\right]$ entonces se descarta el signo positivo) y así, $f^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}; \; f^{-1}: \left[-1, +\infty\right[\to \left]-\infty, 0\right]$



5. $f(x)=6x^2+7x-3; \quad f: \left]-\infty, -\frac{7}{12}\right] \to \left[-\frac{121}{24}, +\infty\right[$

Solución

$f(x)=6x^2+7x-3; \quad f: \left]-\infty, -\frac{7}{12}\right] \to \left[-\frac{121}{24}, +\infty\right[$

$y=6x^2+7x-3 \;\Rightarrow\; 0=6x^2+7x-3-y$

Luego,

$\Delta=49-4(6)(-3-y)$

$\Delta=49+72+24y$

$\Delta=121+24y$

$\Rightarrow\; x=\dfrac{-7\pm\sqrt{121+24y}}{12}$ (Como el dominio de f será el codominio de f^{-1} y éste es $\left]-\infty, -\frac{7}{12}\right]$ entonces se descarta la función con signo positivo)

Así,

$f^{-1}(x)=\dfrac{-7-\sqrt{121+24x}}{12}; \quad f^{-1}: \left[-\frac{121}{24}, +\infty\right[\to \left]-\infty, -\frac{7}{12}\right]$

Ejercicios

1. $f:\mathbb{R}-\{-4\}\to\mathbb{R}-\{2\};\; f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}$
2. $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+5}}{3};\quad f:[-5,\infty[\to IR$
3. $f(x)=2x^2-7x-3;\quad f:\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right[\to\left[-\dfrac{73}{8},+\infty\right[$

R/

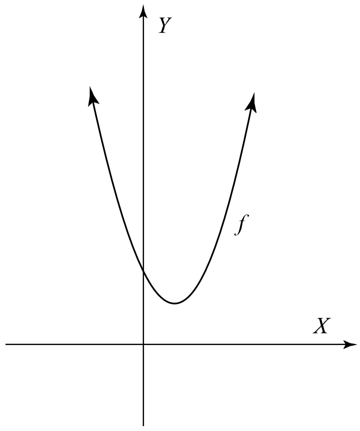
$$f^{-1}(x)=\frac{7+\sqrt{73+8x}}{4};\quad f^{-1}:\left[-\frac{73}{8},+\infty\right[\to\left[\frac{7}{4},+\infty\right[$$

Signo y ceros de una función

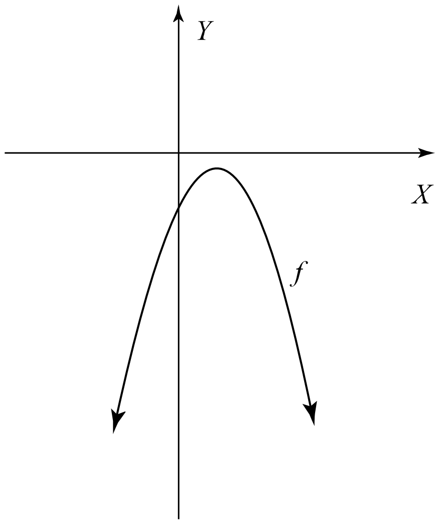
Para cada x, x en el dominio de una función f, su imagen en $f(x)$ es un número real que puede ser cero, positivo, o negativo.

- ✓ Si $f(x)=0,\ x\in D_f$ entonces x es un cero de f.
- ✓ Si $f(x)>0,\ \forall x,\ x\in A,\ A\subset D_f$, entonces diremos que f es positiva en A.
- ✓ Si $f(x)<0,\ \forall x,\ x\in A,\ A\subset D_f$, entonces diremos que f es negativa en A.

La función representada es positiva en todo su dominio



La función representada es negativa en todo su dominio



Ejemplo

Dada la función $f:\mathbb{R}-\{2,-1\}\to\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}-\{2,-1\}$ definida por $f(x)=\dfrac{-3(x+4)}{(2-x)(x+1)}$ determine los ceros de la función y los intervalos en donde dicha función es positiva y en los que es negativa.

Solución

<u>Ceros de la función</u>

La función f se hace cero en $x=-4$ y el -4 pertenece al dominio de la función estudiada por lo tanto $x=-4$ es un cero de la función.

<u>Positiva y negativa</u>

	$-\infty$ -4	-4 -1	-1 2	2 $+\infty$
-3	–	–	–	–
$x+4$	–	+	+	+
$2-x$	+	+	+	–
$x+1$	–	–	+	+
Signo	–	+	–	+

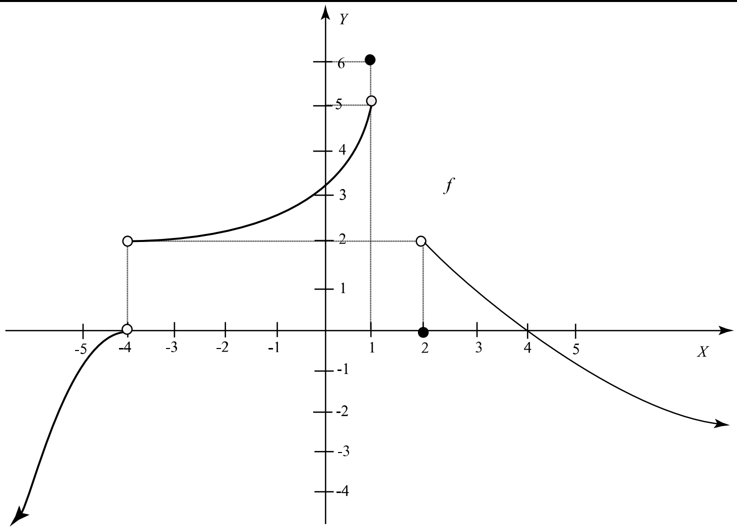
f es positiva en el conjunto $]-4,-1[\,\bigcup\,]2,+\infty[$

f es negativa en el conjunto $]-\infty,-4[\,\bigcup\,]-1,2[$

Ejercicio

Con base en la gráfica adjunta, determine:

a) Intervalo(s) donde la función es negativa.
b) Intervalo(s) donde la función es positiva.
c) Intervalo(s) donde la función es estrictamente creciente.
d) Intervalo(s) donde la función es estrictamente decreciente.



Operaciones con funciones

Si f y g son funciones cuyos dominios son A y B respectivamente, entonces las funciones $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ se definen como sigue.

- ✓ $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad D_{f+g}=A\cap B$.
- ✓ $(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad D_{f-g}=A\cap B$.
- ✓ $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \quad D_{f\cdot g}=A\cap B$.
- ✓ $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}}=\{x\in A\cap B \,/\, g(x)\neq 0\}$

Ejemplo

Dadas $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\sqrt{x}$ y $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$ con $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ encuentre: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

Solución

1. $(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2} \quad D_{f+g}=[0,2]$.
2. $(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{4-x^2} \quad D_{f-g}=[0,2]$.
3. $(f\cdot g)(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x(4-x^2)}=\sqrt{4x-x^3} \quad D_{f\cdot g}=[0,2]$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}}=\sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}} \quad D_{f/g}=[0,2[$.

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f \circ g$ (también llamada composición de f y g) se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; obsérvese que para hacer la composición de f y g, $g(x) \subset D_f$.

Ejemplos

1. Considere las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x - 3$

   a. Encuentre las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

   $$\text{R/}\ (f \circ g)(x) = (x-3)^2 \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$
   $$\text{y} \quad (g \circ f)(x) = x^2 - 3 \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R}$$

   b. Calcule $(f \circ g)(2)$

   c. Calcule $(g \circ f)(2)$

   d. Calcule $g\left[f(1)\right]$

2. Dadas las funciones $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g : D \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2 + 1$, para que la función $f \circ g$ exista ¿Cuál debe ser el conjunto D?

Para que la función $f \circ g$ exista, el ámbito de g debe estar contenido en el dominio de f, por tanto

$$y = x^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$$

El dominio de g debe ser el conjunto $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

Nota

$(f \circ f^{-1})(x) = x$; es decir, la composición de una función con su inversa resulta ser la función identidad.

Ejemplo

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$, determine el valor de $(f \circ f)(-3)$

Solución

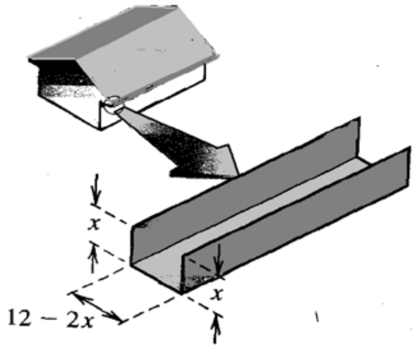
$(f \circ f)(-3) = f(f(-3))$, ahora se calcula $f(-3) = \dfrac{2 \cdot -3 - 1}{-3} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$

Luego se sustituye en la original $(f \circ f)(-3) = f(f(-3)) = f\left(\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{2 \cdot \frac{7}{3} - 1}{\frac{7}{3}} = \dfrac{11}{7}$.

Problemas de aplicación

Ejemplos

1. Si a partir de una lámina metálica rectangular y larga de 12 pulgadas de ancho, se desea fabricar un canal doblando hacia arriba dos lados de modo que sean perpendiculares a la lámina. ¿Cuántas pulgadas deben doblarse para dar al canal su máxima capacidad? (Ver figura siguiente).



Solución

Si x representa la cantidad de pulgadas dobladas en cada lado, el ancho de la base del canal es igual a $12-2x$ pulgadas. La capacidad será máxima cuando la sección transversal del rectángulo con lados de longitudes x y $12-2x$ tenga su valor máximo. Si denotamos ese valor con $f(x)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(12-2x) \\ &= 12x-2x^2 \\ &= -2x^2+12x \end{aligned}$$

La función anterior tiene la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a=-2$, $b=12$ y $c=0$. En vista de que f es una función cuadrática y $a=-2<0$, se deduce que el valor máximo de f se da cuando $x=\dfrac{-b}{2a}=-\dfrac{12}{2(-2)}=3$.

Por lo tanto, hay que doblar hacia arriba 3 pulgadas en cada lado a fin de alcanzar la capacidad máxima.

Como solución alternativa, podemos observar que la gráfica de la función $f(x)=x(12-2x)$ tiene intersecciones en $x=0$ y $x=6$. En consecuencia, el promedio de las intersecciones $x=\dfrac{0+6}{2}=3$ es la coordenada x del vértice de la parábola y el valor que produce la capacidad máxima.

2. Un meteorólogo infla un globo con helio; si el radio del globo cambia a razón de $1{,}5\ \frac{cm}{s}$ ¿Cómo se expresa el volumen V del globo en función del tiempo t en segundos (s)?

Solución

Aclaración

Después de 1 segundo el radio es $1{,}5\,cm$; al cabo de 2 segundos es $3{,}0\,cm$; luego de 3 segundos es $4{,}5\,cm$, etcétera.

Si x denota el radio del globo y suponemos que el radio primero es igual a cero entonces después de t segundos $x = 1{,}5t$.

El volumen de una esfera de radio x es $V = \frac{4}{3}\pi x^3$; ésto da una relación de función compuesta en que V es una función de x y x es una función de t.

Bibliografía

Alpízar, M. (2014). Notas de clase curso Matemática Fundamental II. Universidad Nacional, Heredia.

Arias, F. y Barrantes, H. (2010). *Introducción a la matemática formal de las funciones.* Editorial UCR. San José, Costa Rica.

Soto, P. (2012). Gráficas de funciones elementales simples, utilizando papel y lápiz. Material utilizado en la capacitación sobre el tema de funciones dado a docentes de Liberia. Proyecto MATEM.

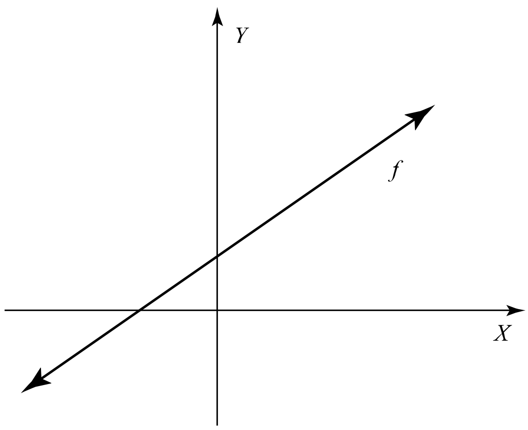
Stewart, J., Redlin. L. y Watson, S. (2001). *Precálculo*. Tercera Edición, International Thomson Editores. México.

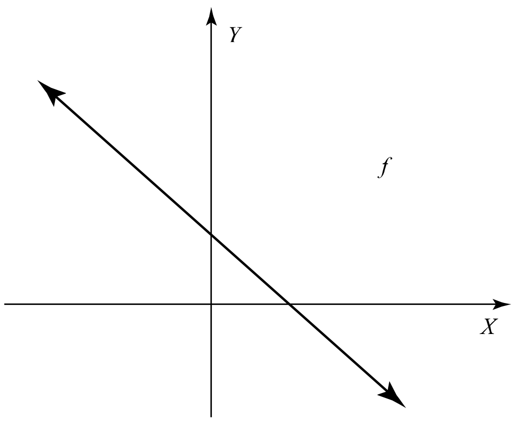
Anexo 1

Gráficas de funciones básicas

- ***Función lineal***

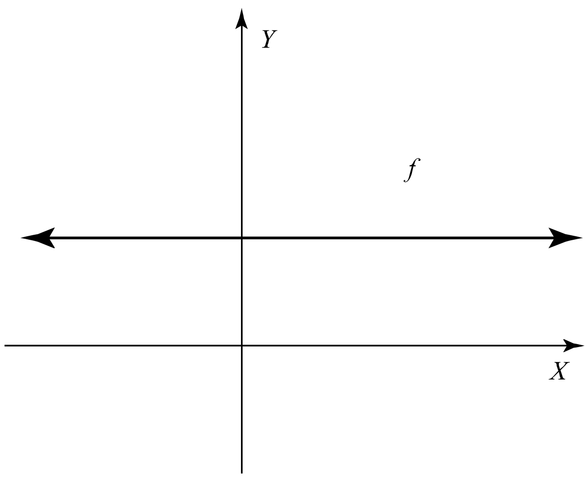
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=mx+b$$





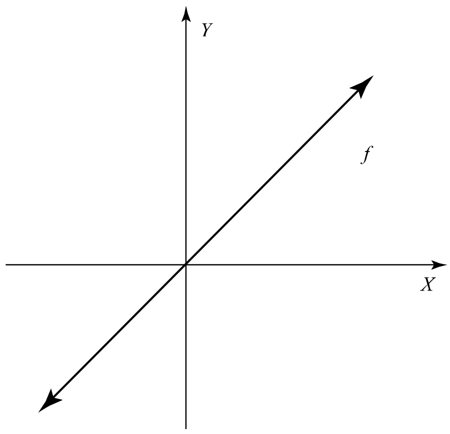
- ***Función constante***

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=b$$



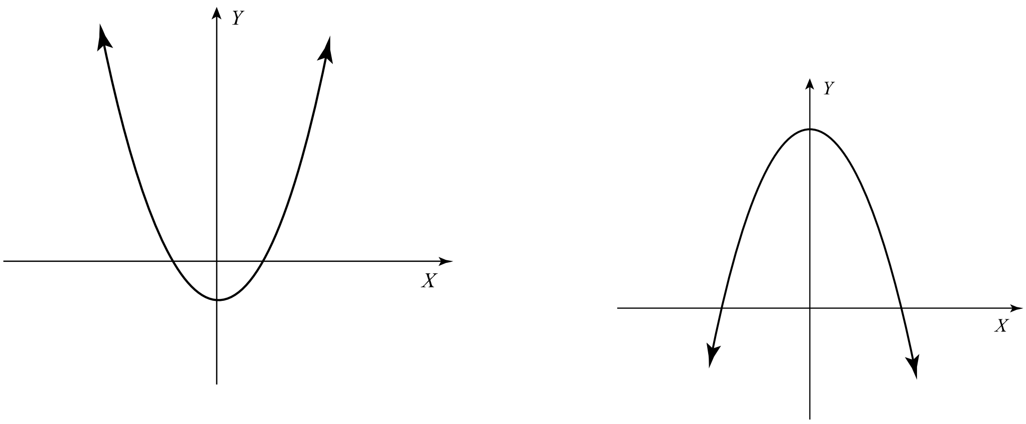
- ***Función identidad***

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x$$



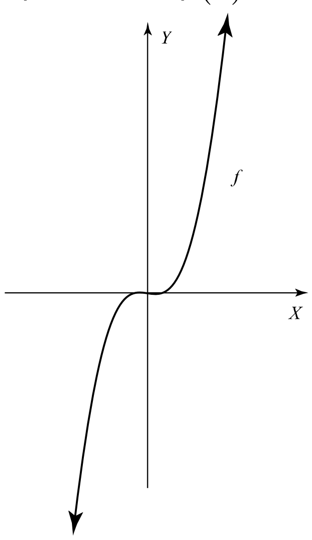
- ***Función cuadrática***

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=ax^2+bx+c$$



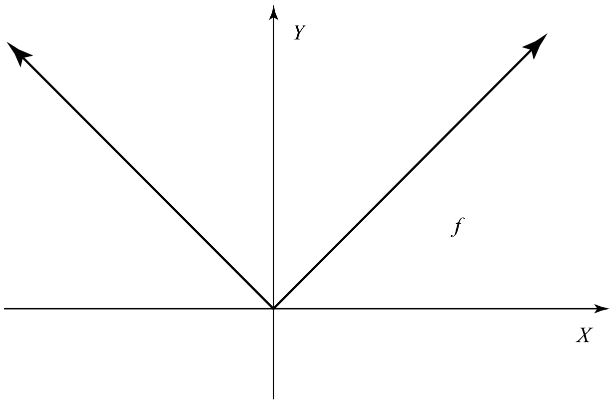
- ***Función cúbica***

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x^3$$



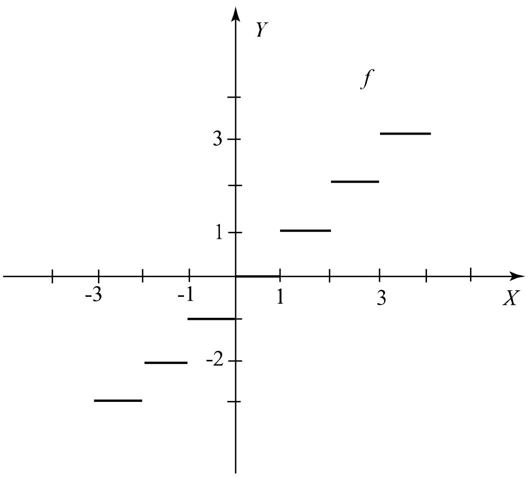
- ***Función valor absoluto***

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}\cup\{0\};\ \ f(x)=|x|$$



- ***Función parte entera***

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{Z};\ f(x)=[\![x]\!]$$



- ***Función raíz cuadrada***

$$f:\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}\rightarrow\mathbb{R}^{+}\cup\{0\};\ f(x)=\sqrt{x}$$