Unidad Didáctica III: Función exponencial y función logaritmo

El estudiante al terminar la unidad didáctica de función exponencial y función logaritmo, deberá dominar los siguientes contenidos:

a) Función exponencial: concepto, dominio, asíntota, ámbito, gráfica, intersección con los ejes, crecimiento, concavidad, signo.
b) Ecuaciones exponenciales.
c) Inecuaciones exponenciales.
d) Función logarítmica: concepto, dominio, asíntota, ámbito, gráfica, intersección con los ejes, crecimiento, concavidad, signo.
e) Logaritmos comunes y naturales (propiedades).
f) Identidades logarítmicas.
g) Ecuaciones logarítmicas.
h) Inecuaciones logarítmicas.
i) Análisis de gráficas. Traslaciones y contracciones de gráficas.
j) Problemas de aplicación.

Al terminar de estudiar este tema con sus ejercicios y problemas, el estudiante debe ser capaz de:

1. Reconocer, determinar, interpretar y graficar funciones exponenciales y logarítmicas.
2. Determinar el concepto, el dominio, la asíntota, el ámbito, la intersección con los ejes, el crecimiento, la concavidad y el signo de este tipo de funciones.
3. Comprobar identidades logarítmicas.
4. Resolver ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas.
5. Resolver problemas de aplicación de funciones.

En este apartado se presentan las definiciones, características y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas que son de gran importancia en Matemática y que tienen múltiples aplicaciones en distintos campos del saber; estas funciones son muy útiles en Química, Biología, Física e Ingenierías.

Función exponencial

Introducción a la función exponencial

El tipo de funciones denominado ***exponencial***, es de enorme importancia en la Matemática y en otras disciplinas, pues tienen aplicación en muchas situaciones prácticas. La investigación de crecimiento de poblaciones humanas, el análisis de la confiabilidad de un producto, los estudios financieros de ahorro o crédito donde se aplica el interés compuesto, la estimación de disolución de una sustancia en otra, el estudio de la presión atmosférica según la altura, el cómputo de la depreciación de un artículo, el cálculo del aumento de valor de un bien y la descripción de la forma como un fármaco introducido en el organismo humano es eliminado; son algunos ejemplos de situaciones que involucran procesos naturales o sociales susceptibles de ser estudiadas utilizando las funciones y las ecuaciones exponenciales.

Un caso concreto donde se evidencia el enorme valor de las herramientas teóricas derivadas de las funciones y de las ecuaciones exponenciales, es la estimación de la antigüedad del tejido muerto, utilizando la ***técnica del carbono 14***. Esta práctica es de trascendental provecho en la ***Arqueología***.

El carbono 14 es un material radiactivo que se encuentra en la atmósfera de nuestro planeta, entra en los tejidos de los seres vivos y su cantidad permanece más o menos constante, se dice entonces que en dicho tejido una cantidad P corresponde al carbono 14. Al morir el tejido, la cantidad de carbono 14 presente en él, decrece de tal modo, que al cabo de aproximadamente 5570 años se reducen a la mitad.

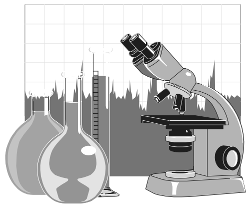
Así, cuando los científicos encuentran algún trozo de materia muerta, se puede estimar la fecha de la muerte, comparando la cantidad de carbono 14 presente en el material en estudio, con la cantidad presente en tejido vivo semejante al estudiado.

Considere la función

$$Q(t) = P\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5570}}$$

Esta función exponencial, describe la cantidad Q de carbono 14 presente en la materia con t años de muerta, si P es la cantidad estimada de carbono 14 en el organismo vivo. Con ella se han obtenido valiosos resultados científicos, al calcular la antigüedad de restos humanos prehistóricos, como los del hombre de Neanderthal o los del Australopitecus.

El crecimiento de las bacterias



Otra disciplina que requiere de la utilización de funciones exponenciales es la ***Biología***. La siguiente sección expone muy bien esta aplicación.

Las bacterias son seres ***unicelulares***; es decir, seres vivos constituidos por una sola célula. Viven formando colonias, pero no existe entre ellas relaciones de especialización o de dependencia. Por ser microorganismos, debe utilizarse el microscopio para observarlos individualmente.

Imagina que eres un científico que descubrió una bacteria, que al cultivarse en la leche, producen en ésta cambios químicos, que pueden ser aprovechadas en el desarrollo de la industria láctea. Has observado que la bacteria se reproduce por ***mitosis***. Es decir, que bajo condiciones ideales, cada cierto lapso, una bacteria aumenta de tamaño y se divide en dos bacterias descendientes; éstas a su vez se subdividen, después de haber transcurrido el mismo intervalo de tiempo, hasta alcanzar la cantidad máxima de bacterias que el medio les permite.

Si el lapso de bipartición es de una hora, entonces el siguiente esquema ilustra el ritmo de reproducción, iniciando con una sola célula bacterial:

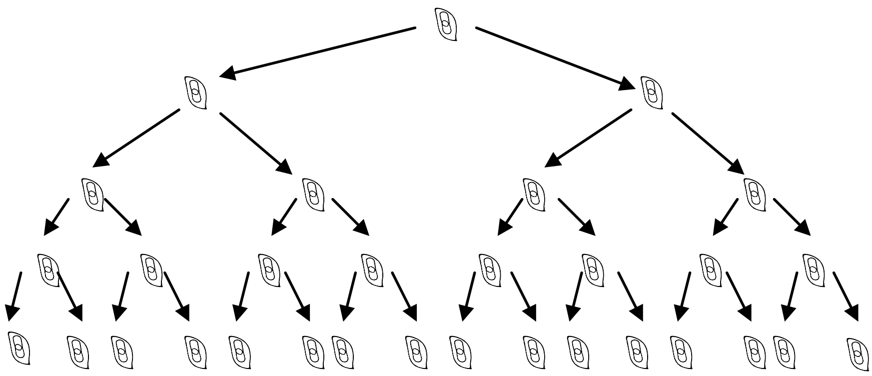
0 horas: 1 célula

1 hora: 2 células

2 horas: 4 células

3 horas: 8 células

4 horas: 16 células



Ejercicio

Con base en el esquema de reproducción de células bacterianas, complete el siguiente cuadro.

Tiempo	5 horas	6 horas	7 horas	8 horas	9 horas	10 horas
Número de células bacteriales						

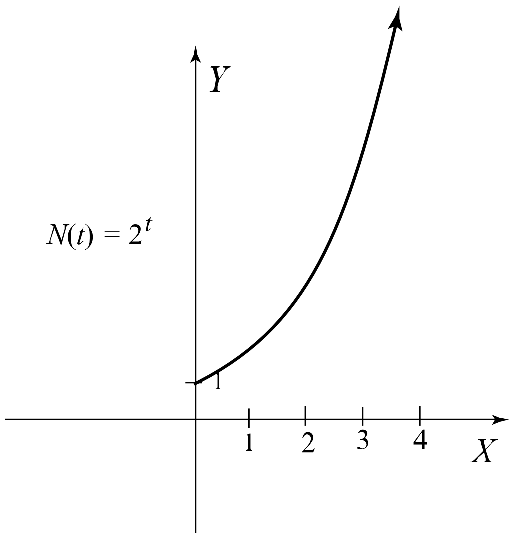
Considerando que cada hora, la cantidad existente de microorganismos bacteriales se duplica; determine una fórmula, que prediga la cantidad de bacterias presentes en un momento, si se comienza con una sola célula bacterial.

FÓRMULA: ________________________

Si realizaste los anteriores cálculos, te habrás dado cuenta que al transcurrir un día, por medio del proceso denominado mitosis, de una sola célula habrán surgido un total de 16 777 216 células. Y en dos días, se tendrá un total de 281 474 976 710 656; es decir ¡Doscientos ochenta y un mil billones, cuatrocientos setenta y cuatro mil novecientos setenta y seis millones, setecientos diez mil seiscientos cincuenta y seis células bacteriales! Si es que el medio es propicio para sostener semejante cantidad de bacterias.

Gráfica y criterio del crecimiento de bacterias

En efecto, si denotamos con la letra " t " a la variable tiempo y con la letra " N " a la cantidad de células bacteriales, la gráfica que muestra cómo varía la cantidad N al transcurrir el tiempo t, se muestra en la figura adjunta. Desde el inicio del experimento con una sola célula, hasta transcurridas cuatro horas.



Ejercicios

1. ¿Es posible mediante el criterio $N(t)=2^t$, calcular la cantidad N si le otorgamos valores no enteros a la variable t?
2. ¿Es posible aplicar la fórmula, si el valor de t es $\frac{1}{3}$? ¿Qué valor adquiere N?
3. ¿Es posible aplicar la fórmula, si el valor de t es $\sqrt{5}$? ¿Qué valor adquiere N?
4. ¿Se pueden otorgar valores negativos a la variable t?
5. Tal y como has logrado verificar, es perfectamente posible completar un cuadro como el siguiente.

t	$-\frac{9}{4}$	$\sqrt[3]{-7}$	-0,825	0	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{5}$
$N(t)=2^t$						

Definición de la función exponencial

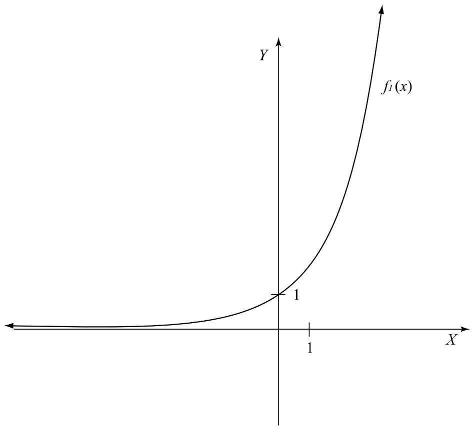
Definición

Una función exponencial con base b es una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, tal que

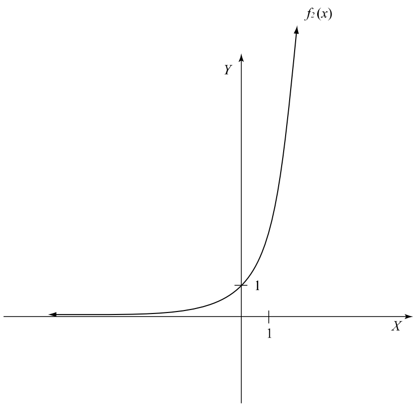
$$y=f(x)=b^x \text{ con } b\in\mathbb{R}^+,\ b\neq 1$$

a) Consideremos la función exponencial con $b>1$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ con $f(x)=b^x$, $b\in\mathbb{R}^+$.

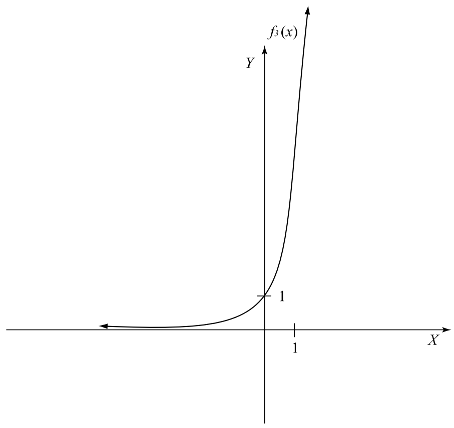
La figura adjunta ilustra las gráficas de $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = \left(\dfrac{25}{8}\right)^x$ y $f_3(x) = \left(\sqrt[3]{126}\right)^x$.



$f_1(x) = 2^x$



$f_2(x) = \left(\dfrac{25}{8}\right)^x$

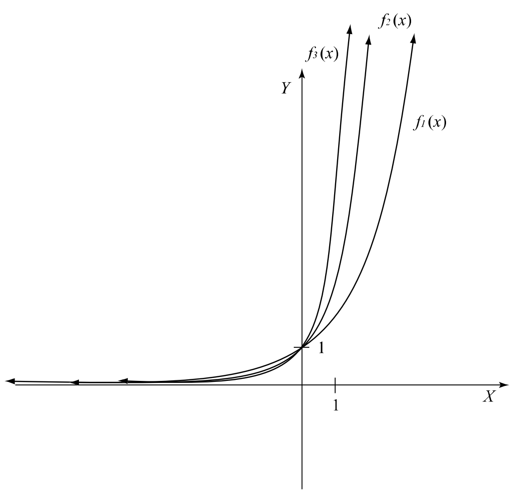


$f_3(x) = \left(\sqrt[3]{126}\right)^x$

¿Qué semejanzas presentan las gráficas anteriores?

¿Qué diferencias presentan las gráficas anteriores?

La figura adjunta ilustra las gráficas de las funciones en un mismo plano cartesiano.



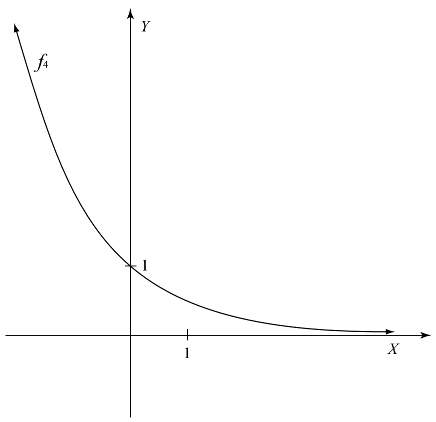
Coincidencias	**Diferencias**
Las tres son funciones.	Para todo valor de x distinto de cero, las tres funciones adquieren valores diferentes. Es decir, si $x_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$, entonces: $f_1(x_0) \neq f_2(x_0) \neq f_3(x_0)$; o lo que es lo mismo $\left(\sqrt[3]{126}\right)^{x_0} \neq \left(\frac{125}{8}\right)^{x_0} \neq 2^{x_0}\ )$
Su dominio real es $\mathbb{R}$.	
Son inyectivas si consideramos que su codominio es $\mathbb{R}$.	
Son biyectivas si consideramos que su codominio es $\mathbb{R}^+$.	
Son estrictamente crecientes.	
Intersecan al eje de las ordenadas y se intersecan entre sí en el punto (0,1).	Conforme mayor es la base, mayor es el ritmo de crecimiento de la función. Es decir, $f_3(x)$ crece más rápido que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ crece más rápido que $f_1(x)$.
El eje de las abscisas es asintótico a las tres funciones.	

Definición

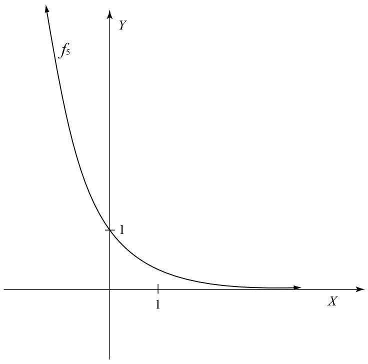
La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$ con $b\in\mathbb{R}^+, b>1$; se denomina *función exponencial creciente*.

b) Consideremos la función exponencial con $b\in\mathbb{R},\ 0<b<1$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$

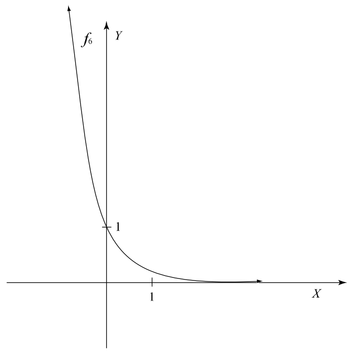
En la figura adjunta se muestran tres gráficas de relaciones del tipo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$ con $b\in\mathbb{R},\ 0<b<1$. Cuyos criterios son $f_4(x)=(0,5)^x$, $f_5(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $f_6(x)=\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^x$.



$f_4(x)=(0,5)^x$



$$f_5(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

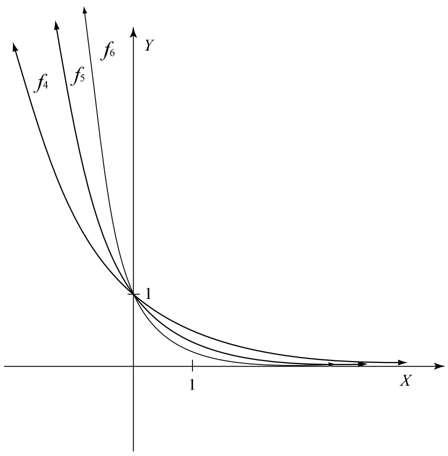


$$f_6(x)=\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^x$$

¿Qué semejanzas presentan las gráficas anteriores?

¿Qué diferencias presentan las gráficas anteriores?

En la figura adjunta se muestran las tres gráficas en un mismo plano cartesiano.



<table>
<tr><th>Coincidencias</th><th>Diferencias</th></tr>
<tr><td>Las tres son funciones.</td><td rowspan="5">Para todo valor de x distinto de cero, las tres funciones adquieren valores diferentes. Es decir, si $x_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$, entonces: $f_4(x_0)\neq f_5(x_0)\neq f_6(x_0)$; o lo que es lo mismo $\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)^{x_0} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^{x_0} \neq (0{,}5)^{x_0}$)</td></tr>
<tr><td>Su dominio máximo es $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>Son inyectivas si consideramos que su codominio es $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>Son biyectivas si consideramos que su codominio es $\mathbb{R}^+$.</td></tr>
<tr><td>Son estrictamente decrecientes.</td></tr>
<tr><td>Intersecan al eje de las ordenadas y se intersecan entre sí en el punto (0,1).</td><td rowspan="2">Conforme menor es la base, mayor es el ritmo de decrecimiento de la función. Es decir, $f_6(x)$ decrece más rápido que $f_5(x)$ y $f_5(x)$ decrece más rápido que $f_4(x)$.</td></tr>
<tr><td>El eje de las abscisas es asintótico para las tres funciones.</td></tr>
</table>

Considerando el análisis anterior se ofrece la siguiente definición**.**

Definición: La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que $f(x)=b^{x}$ con $b\in\mathbb{R}^{+}$, $0<b<1$; se denomina *función exponencial decreciente.*

Definición: **Función exponencial natural**
Es una función exponencial con base e; es decir, es la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$, tal que $f(x)=e^{x}$.

Ejercicios

1. Determine si las siguientes funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ con los criterios indicados son crecientes o decrecientes.

   a) $f(x)=2^{-3x}$
   b) $f(x)=4^{-x}$
   c) $f(x)=2^{2x-3}$
   d) $f(x)=3^{-x+3}$
   e) $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$

2. Considere las funciones f y g definidas a continuación:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que $f(x)=3^{x}$

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$

   a) Complete la siguiente tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

   b) Realice un esbozo de las gráficas de las funciones f y g.

   c) Analice las gráficas que construyó y luego complete el siguiente cuadro.

Pregunta	$f(x)$	$g(x)$
¿Cuál es el dominio de la función?		
¿Cuál es el codominio de la función?		
¿Cuál es el ámbito?		
¿Es inyectiva la función?		
¿Es sobreyectiva la función?		
¿Es creciente o decreciente la función?		
¿En qué punto interseca la gráfica de la función al eje de las ordenadas?		

3. Escribe en el paréntesis que antecede cada enunciado V o F según sea la proposición verdadera o falsa.

( ) La correspondencia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que $f\left(x\right)=0^{x}$, NO es función, pues se ***indefine*** para todo valor de x en $\mathbb{R}^{-}\cup\left\{0\right\}$.

( ) $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ tal que $f\left(x\right)=0^{x}$, es ***función constante***, pues $f\left(x\right)=0$ para toda x real positiva.

( ) $f:\mathbb{R}\to 1$ tal que $f\left(x\right)=b^{x}$ con $b=1$ es una función exponencial.

( ) $f:\mathbb{R}^{+}\to 0$ tal que $f\left(x\right)=b^{x}$ con $b=0$ NO es una función exponencial.

( ) La correspondencia o relación $f:\mathbb{R}\to 0$ tal que $f\left(x\right)=b^{x}$ con $b=0$ es una función.

¿Por qué la base en un función exponencial NO puede ser negativa?

Completa correctamente cada uno de los siguientes enunciados, escribiendo sobre el espacio punteado el símbolo $\in$ o el símbolo $\notin$, según corresponda.

$\sqrt[6]{\frac{-3}{5}}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$	$\left(\frac{-1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$
$\left(\frac{-2}{3}\right)^{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{-1}{4}}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$
$\sqrt[5]{-95}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$	$\sqrt[4]{125}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$
$\left(-3\right)^{\frac{2}{3}}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$	$\left(125\right)^{\frac{5}{6}}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$
$-4\sqrt{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$	$\sqrt[9]{\frac{-7}{8}}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbb{R}$

Hay que recordar que para todo número par q y para todo número real negativo c, la expresión $\sqrt[q]{c}$ no pertenece a $\mathbb{R}$. Asimismo, para todo número real negativo c, si la fracción $\frac{p}{q}$ es irreductible y q es par, la expresión $c^{\frac{p}{q}}$ no pertenece a $\mathbb{R}$.

Luego la correspondencia $f_{n}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ con $f_{n}\left(x\right)=c^{x}$, $c\in\mathbb{R}$ tal que $c<0$, NO es función pues se indefine para toda $x=q$ con q par y se indefine para toda $x=\frac{p}{q}$, donde $\frac{p}{q}$ es fracción irreductible con q par.

Características de la función exponencial

Dominio de la función exponencial
Si consideramos la función exponencial definida como $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que $f(x)=b^{x}$ con $b\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$, el dominio sería $\mathbb{R}$.

Por otra parte, si el criterio de la función presenta una transformación de la función exponencial, el dominio de la misma puede variar.

Ejemplo
Determine el dominio de la función $f:D\to\mathbb{R}$ con $f(x)=3^{\sqrt{2x+1}}$.

Para determinar el dominio de la función se debe indagar para qué valores de x la expresión $\sqrt{2x+1}$ pertenece al conjunto de los números reales; esto es:

$$\sqrt{2x+1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el dominio de la función sería $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

Rango o ámbito de la función exponencial
Si consideramos la función exponencial definida como $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que $f(x)=b^{x}$ con $b\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$, el rango sería $\mathbb{R}^{+}$.

Ejemplos

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, su rango es $\mathbb{R}^{+}$
b) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $h(x)=3^{x-1}$, su rango es $\mathbb{R}^{+}$
c) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $g(x)=3\cdot 2^{x}$, su rango es $\mathbb{R}^{+}$

Es importante considerar que si el criterio de la función presenta una transformación de la función exponencial, el rango de la misma puede variar.

Ejemplo
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=2^{x}+1$, el rango de f es $]1,+\infty[$.
Sabemos que $y=2^{x}+1$, consideremos dos casos:

i. Si $2^{x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$2^{x}>0\ \Leftrightarrow\ 2^{x}+1>1\ \Leftrightarrow\ y>1\ \Rightarrow\ y\in\,]1,+\infty[$$

ii. Si $y=2^{x}+1$ [1]

$$y=2^{x}+1\ \Rightarrow\ y-1=2^{x}\ \Rightarrow\ \log_{2}(y-1)=x$$

[1] Este caso es la función inversa de la exponencial que más adelante se definirá.

Para que la expresión $\log_2(y-1)$ tenga sentido en el conjunto de los números reales $y-1>0 \Leftrightarrow y>1 \Rightarrow y\in]1,+\infty[$.

De i) y ii) se deduce que el rango de la función f es $]1,+\infty[$.

Monotonía de la función exponencial

- ✓ La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$ con $b\in\mathbb{R},\ b>1$ es estrictamente creciente.
- ✓ La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$ con $b\in\mathbb{R},\ 0<b<1$ es estrictamente decreciente.

Signo de la función exponencial

Ejemplo

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=2^x-1$.

Se debe buscar para qué números reales $f(x)>0\Rightarrow 2^x-1>0$. Al resolver la inecuación[2] se tiene $2^x-1>0\Rightarrow 2^x>1\Rightarrow 2^x>2^0\Rightarrow x>0$.

Por lo tanto f es positiva en el intervalo $]0,+\infty[$.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$.

Se debe buscar para qué números reales $f(x)>0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0$. Al resolver la inecuación se tiene $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x>1\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^0\Rightarrow x<0$.

Por lo tanto f es positiva en el intervalo $]-\infty,0[$.

Gráfica de la función exponencial

Puntos de intersección con los ejes

Eje x

La función elemental $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$ con $b\in\mathbb{R}^+$ no interseca al Eje x; sin embargo, si se tiene una trasformación de ella, ésta si puede intersecar a dicho eje.

[2] En este apartado, solo que más adelante se abordan las inecuaciones exponenciales.

Ejemplo
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ tal que $f\left(x\right)=2^{x}-1$.

Para que la función f interseque al Eje x se debe resolver la siguiente ecuación $y=0\Rightarrow 0=2^{x}-1\Rightarrow 1=2^{x}\Rightarrow 0=x$. Por lo tanto, la gráfica de la función contiene el punto $\left(0,0\right)$.

Eje y
La función elemental $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ tal que $f\left(x\right)=b^{x}$ con $b\in\mathbb{R}^{+}$ interseca al Eje y en el punto $\left(0,1\right)$; sin embargo, si se tiene una trasformación de ella el punto de intersección puede variar.

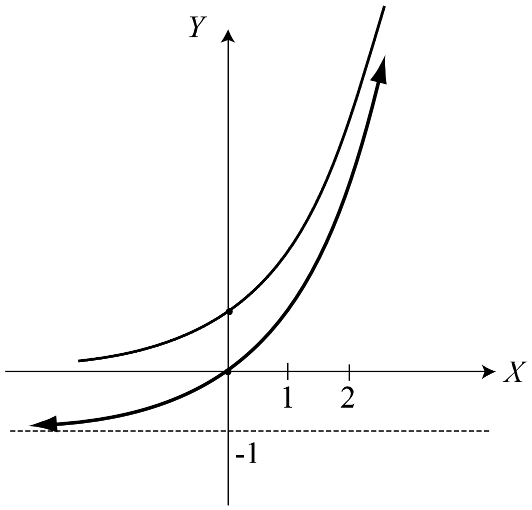
Ejemplo
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ tal que $f\left(x\right)=2^{x}-1$.

Para que la función f interseque al Eje y, el valor en la función para x debe ser de cero; esto es $x=0\Rightarrow f\left(0\right)=2^{0}-1=0$. Por lo tanto, la gráfica de la función contiene el punto $\left(0,0\right)$.

Trazo de la gráfica

Ejemplo
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ tal que $f\left(x\right)=2^{x}-1$.

La representación gráfica de esta función sería una traslación de la función con criterio $f\left(x\right)=2^{x}$.



Ecuaciones exponenciales

Si un objeto se coloca en un horno industrial, durante sus primeras siete horas, aumenta su temperatura de tal modo que la temperatura T en grados centígrados (°C) en t horas está dada por la función $T=8\cdot 2^{t}$ ¿Cuánto tiempo es necesario para que el objeto introducido en ese horno alcance una temperatura de 512°C?

Para resolver el ejercicio, primeramente es necesario exponer la situación de una forma matemática conveniente, para ello la pregunta anterior puede replantearse de la forma siguiente: ¿Cuál es el tiempo t tal que al aplicar la fórmula $8\cdot 2^t$ da como resultado una temperatura ***igual a*** 512°C?

$$8\cdot 2^t = 512 \Rightarrow 2^{3+t} = 2^9$$

¿De qué forma se resuelve la ecuación exponencial $2^9 = 2^{3+t}$?

$$2^9 = 2^{3+t} \Rightarrow 9 = 3+t \Rightarrow 6 = t$$

Deben trascurrir 6 horas para que el objeto alcance una temperatura de 512°C.

Nota importante

Por otra parte, la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $f(x)=b^x$, con $0<b<1$ o bien $1<b$, es ***biunívoca***, lo que significa que para números reales r, s, w, z :

$\to$ Si $z \neq w$ entonces $b^z \neq b^w$

$\to$ Si $b^r = b^s$ entonces $r = s$

Para resolver ecuaciones exponenciales, son útiles las siguientes propiedades.

- $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
- $a^x = b^x \Rightarrow a = b$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$

Ejemplos

Resuelva y dé el conjunto solución de las siguientes ecuaciones exponenciales.

1. $7^{x+3} = 7^{3x-5}$

Solución

$$7^{x+3} = 7^{3x-5} \Rightarrow x+3 = 3x-5 \Rightarrow 8 = 4x \Rightarrow 2 = x$$

$$S = \{2\}$$

2. $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{x-2}$

Solución

$$16\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2^{x-2} \Rightarrow 2^4\cdot\left(2^{-1}\right)^3 = 2^{x-2} \Rightarrow 2^4\cdot 2^{-3} = 2^{x-2} \Rightarrow 2^1 = 2^{x-2} \Rightarrow 1 = x-2 \Rightarrow x = 3$$

$$S = \{3\}$$

Ejercicios

Resuelva y dé el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

1. $32 = 2^x$ R/ $S = \{5\}$
2. $3^{x^2-1} = 1$ R/ $S = \{-1,\ 1\}$
3. $e^{3x+27} = 1$ R/ $S = \{-9\}$
4. $5^x = 40$ R/ $S = \left\{\dfrac{3\log 2 + \log 5}{\log 5}\right\}$
5. $4^{3x} = 3^{x-1}$ R/ $S = \left\{\dfrac{\log 3}{\log 3 - 6\log 2}\right\}$
6. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{2}{5}$ R/ $S = \{-1\}$
7. $16^{x-1} = 2^{x^2}$ R/ $S = \{2\}$
8. $2 = 4^{2x-1} - 6$ R/ $S = \left\{\dfrac{5}{4}\right\}$
9. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x-2} = 625$ R/ $S = \{-2\}$
10. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3x} = \sqrt{81}$ R/ $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$
11. $2^x = 4^{x-1} \cdot 8^{1-2x}$ R/ $S = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$
12. $\left(3^x\right)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ R/ $S = \{0,\ 2\}$
13. $3^{5x} = 2^{7x}$ R/ $S = \{0\}$
14. $5 \cdot 3^{2x} = 2$ R/ $S = \left\{\dfrac{\log 2 - \log 5}{2\log 3}\right\}$
15. $2 \cdot 4^{x-1} = 8^x$ R/ $S = \{-1\}$
16. $2^x \cdot 3^x = 36$ R/ $S = \{2\}$
17. $5^{x+2} = 3^{-x+4}$ R/ $S = \left\{\log_{15}\left(\dfrac{81}{25}\right)\right\}$
18. $9^{\left(\frac{x-1}{2}\right)} = 3^{5-2x}$ R/ $S = \{2\}$
19. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ R/ $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$
20. $5^{2x} = 7^{x+1}$
21. $2^x + 2^{-x} = 2$
22. $7^{3x-6} = 2^{2x+4}$
23. $7^x - 1 = 6 \cdot 7^{-x}$
24. $3^{4x} - 2\left(3^{2x}\right) + 1 = 0$

Inecuaciones Exponenciales

Dada la inecuación $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$, determine el conjunto de solución.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \Rightarrow x+2 < 2x \Rightarrow 2 < x$

$$S =]2, +\infty[$$

Aplicaciones de la función exponencial

1. El valor de una propiedad aumenta cada año, de modo que después de t años de haberla comprado en 59 049 colones, el valor V de la propiedad está dada por la función $\mathrm{V(t)} = 59049 \cdot 3^{\frac{t}{7}}$ ¿En cuántos años el valor de la propiedad será igual a 14 348 907 colones?

Solución

Datos

Valor de la propiedad $\mathrm{V(t)} = 59049 \cdot 3^{\frac{t}{7}}$

t : tiempo en años

Valor actual de la propiedad 14 348 907 colones

Planteo y solución de la ecuación

$$14\,348\,907 = 59049 \cdot 3^{\frac{t}{7}}$$

$$\Rightarrow 3^{15} = 3^{10} \cdot 3^{\frac{t}{7}} \Rightarrow 3^{15} = 3^{\frac{70+t}{7}}$$

$$\Rightarrow 15 = \frac{70+t}{7} \Rightarrow 105 - 70 = t \Rightarrow 35 = t$$

Respuesta

El valor de la propiedad será de 14 348 907 colones después de 35 años de comprada.

2. Si se ingiere una dosis de 25 miligramos de un fármaco antibiótico, la cantidad C presente en el organismo se reduce por medio de la orina, en una forma tal que al cabo de x horas se tendrán $25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ miligramos de dicho fármaco ¿En cuántas horas estarán presentes 0,008 mg de fármaco en el organismo?

Solución

Datos

C : cantidad del fármaco presente en el organismo después de cierto tiempo.

$C = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

x : tiempo en horas.

0,008 mg cantidad de fármaco en el organismo.

Planteo y solución de la ecuación

$$\begin{aligned}
&0,008 = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \\
&\Rightarrow \frac{8}{1000} = 5^2 \cdot \left(5^{-1}\right)x \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^2 \cdot 5^{-x} \Rightarrow 5^{-3} = 5^{2-x} \\
&\Leftrightarrow -3 = 2 - x \Rightarrow x = 5
\end{aligned}$$

Respuesta

Después de cinco horas de tomado el fármaco en el cuerpo estarán 0,008 mg del mismo.

Ejercicio

En una determinada porción de tejido vivo se encuentran cuatro nanogramos de carbono 14. ¿Cuántos años de muerto tendrá una porción semejante de tejido, si en ella se encuentran 0,625 nanogramos de carbono 14? Considere que 0,625=$\frac{1}{16}$ y recuerde que si la cantidad de carbono 14 cuando el tejido vivo es P, la cantidad Q de carbono 14 presente en el organismo muerto hace t años está dado por la ecuación:

$$Q = P \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5570}}$$

Función logaritmo

Definición de la función logaritmo

Definición**:** La función logarítmica es la función inversa de la exponencial y viceversa; el criterio de asociación de la función logarítmica es $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b(x)$ con $b > 0$ y $b \neq 1$ $\left(b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\right)$.

Nota

La expresión $\log_a(x)$ se lee “logaritmo de x en base a”.

Definición**:** El logaritmo de un número N en base a es el exponente x al que se debe elevar a para que sea igual a N, es decir, $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$.

Ejemplos

→ Las expresiones $\log_3(-9)$ y $\log_2 0$ no están definidas; ya que no existen números reales x y y tales que $3^x = -9$ y $2^y = 0$.

→ Determine el valor de n en la siguiente expresión $\log_3 n = 4$

$$\log_3 n = 4 \Leftrightarrow 3^4 = n \Leftrightarrow 81 = n$$

→ Determine el valor de n en la siguiente expresión $\log_4 64 = n$

$$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$
$$\Rightarrow n = 3$$

Ejemplos

Halle el valor de n en las siguientes expresiones.

1. $\log_3 n = 4$ R/ $n = 81$
2. $\log_n 81 = 4$ R/ $n = 3$
3. $\log_4 64 = n$ R/ $n = 3$
4. $\log_5 n = -5$ R/ $n = \dfrac{1}{3125}$
5. $\log_n 64 = \dfrac{3}{4}$ R/ $n = 256$
6. $\log_n 125 = 3$ R/ $n = 5$
7. $\log_2\left(\dfrac{1}{32}\right) = n$ R/ $n = -5$

Función logaritmo natural

Definición: Es la función logarítmica con base e; es decir $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \ln x$ y $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

Características de la función logarítmica

Dominio de la función logaritmo

Si consideramos la función logaritmo definida como $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b(x)$, con $b > 0$ y $b \neq 1$ $\left(b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\right)$, el dominio de f sería $\mathbb{R}^+$; sin embargo, si el criterio de la función presenta una transformación de la función logaritmo, el dominio de la misma puede variar.

Ejemplos

1. Dada la función $f(x)=\log_2(3x-2)$ encuentre su dominio real.

Solución

Para que $\log_2(3x-2)\in\mathbb{R}$ es necesario que $3x-2>0$
Al resolver la desigualdad se tiene

$$3x-2>0\Rightarrow 3x>2\Rightarrow x>\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el dominio de la función dada es $\left]\frac{2}{3},+\infty\right[$.

2. Dada la función $f(x)=\log_2(3-x)-2\log_2(16-x^2)$ encuentre su dominio real.

Solución

Para que $\log_2(3-x)-2\log_2(16-x^2)\in\mathbb{R}$ es necesario que $3-x>0$ y $16-x^2>0$

a) $3-x>0\Rightarrow -3+x<0\Rightarrow x<3\Rightarrow x\in\left]-\infty,3\right[$. Por tanto, $D_1=\left]-\infty,3\right[$

b) $16-x^2>0\Rightarrow(4-x)(4+x)>0$

	$-\infty$ -4	-4 4	4 $+\infty$
$x+4$	-	+	+
$4-x$	+	+	-
$(4-x)(4+x)$	-	+	-

Por lo tanto, $D_2=\left]-4,4\right[$.

Ahora el dominio real de la función sería $D_1\cap D_2$; en este caso $\left]-\infty,3\right[\cap\left]-4,4\right[=\left]-4,3\right[$.

Ejercicio

Determine el dominio real de la función $f(x)=x-\log_2\left(\dfrac{2+3x}{5-x}\right)$.

Rango de la función logaritmo

Si consideramos la función logaritmo definida como $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\log_b(x)$, con $b>0$ y $b\neq 1$ $\left(b\in\mathbb{R}^+-\{1\}\right)$, el rango es $\mathbb{R}$.

Monotonía de la función logarítmica

El crecimiento y decrecimiento de la función logarítmica está relacionado directamente con el valor de su respectiva base; es decir,

$\rightarrow$ Si $0<a<1$ entonces la función $f(x)=\log_a(x)$ es decreciente.

$\rightarrow$ Si $a>1$ entonces la función $f(x)=\log_a(x)$ es creciente.

Otra manera de trazar la gráfica es utilizando traslaciones de la gráfica de la función $f(x) = \log x$.

De manera resumida, las características de la función logaritmo $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$, $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$[3]**.**

- $\to$ Su dominio es $\mathbb{R}^+$ y su ámbito es $\mathbb{R}$.
- $\to$ Es una función biyectiva y continua.
- $\to$ Es asintótica al Eje de las ordenadas.
- $\to$ No corta al Eje y.
- $\to$ Corta al Eje de las abscisas en el punto (1, 0) porque $f(1) = \log_a 1 = 0$.
- $\to$ El par ordenado $(a,\ 1)$ pertenece a la gráfica de la función porque $f(a) = \log_a a = 1$.
- $\to$ Si $0 < a < 1$ entonces la función $f(x) = \log_a(x)$ es estrictamente decreciente.
- $\to$ Si $a > 1$ entonces la función $f(x) = \log_a(x)$ es estrictamente creciente.
- $\to$ $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$

Notas

- $\to$ Si $f(x)$ es creciente entonces $-f(x)$ es decreciente.
- $\to$ $\log_{10}(x) = \log(x)$ (logaritmos decimales o de Briggs en honor a Henry Briggs).
- $\to$ $\log_e(x) = \ln(x)$ (logaritmos naturales).

Gráfica de una función logarítmica

Puntos de intersección con los Ejes

Eje x

La función elemental $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b(x)$, con $b > 0$ y $b \neq 1$ $\left(b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}\right)$; interseca al Eje x en el punto $(1,0)$; sin embargo, si se tiene una trasformación de la función elemental, ese punto puede variar.

Ejemplo

¿Cuál es el punto de intersección de la gráfica de la función $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3 - \log_2 x$ con el Eje x?

Solución

Para que la función f interseque al Eje x se debe resolver la siguiente ecuación:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 3 - \log_2 x \Rightarrow 3 = \log_2 x \Rightarrow 2^3 = x$$

Por lo tanto, la gráfica de la función interseca al Eje x en el punto $(8,0)$.

[3] Si se presenta una trasformación de la función logaritmo elemental esas características pueden variar.

Eje y

La función elemental $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)=\log_b(x)$, con $b>0$ y $b\neq 1$ $\left(b\in\mathbb{R}^+-\{1\}\right)$, no interseca al Eje y; sin embargo, si se tiene una trasformación de la función elemental esta situación puede variar.

Ejemplo

¿Interseca la gráfica de la función $f:\left]-4,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\log_2(x+4)$ al Eje y?

Solución

Para que la función f interseque al Eje y, el valor en la función para x debe ser de cero. Esto es:

$$x=0 \Rightarrow y=f(0)=\log_2(0+4)=2$$

Por lo tanto, la gráfica de la función contiene el punto $(0,2)$.

Para trazar la gráfica de una función logarítmica puede usarse una tabla de valores. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Grafique las funciones $f(x)=\log_2(x)$ y $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x)$ con $f:\ \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$.

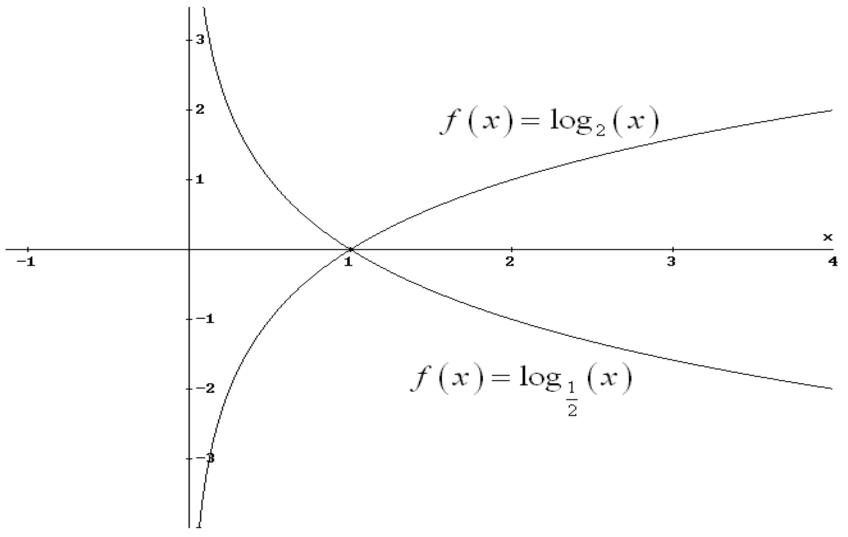
Solución

Primeramente tomamos algunos valores en un intervalo en el dominio de la función, y calculamos sus respectivas imágenes. Veamos

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}}(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

Luego, ubicamos los pares ordenados $(x,\ y)$ en el plano cartesiano y trazamos la gráfica.



Traslación de gráficas de funciones logarítmicas

Ejemplos

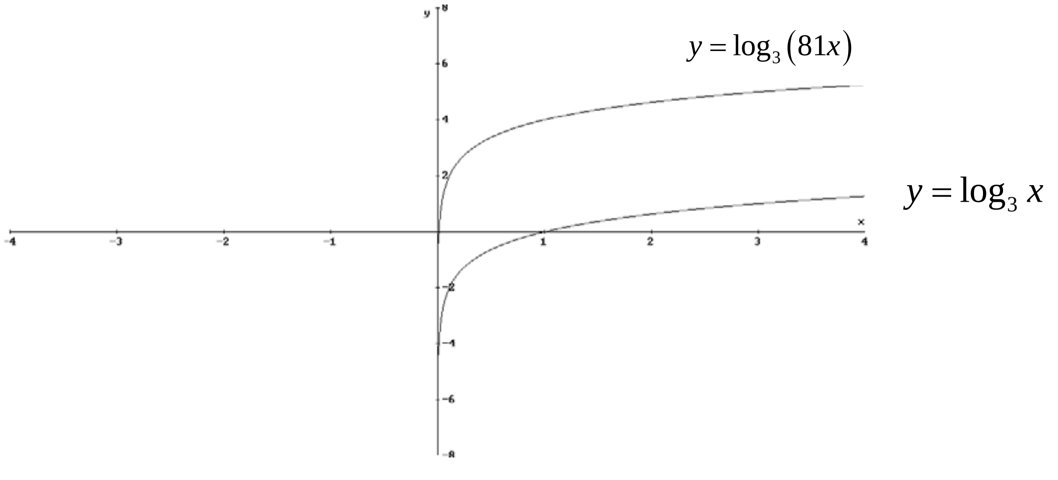
1. Trazar la gráfica de la función $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \log_3(81x)$

Solución

La función se puede reescribir como sigue:

$$
\begin{aligned}
y &= \log_3(81x) \\
y &= \log_3 81 + \log_3 x \\
&= \log_3 3^4 + \log_3 x \\
&= 4 + \log_3 x
\end{aligned}
$$

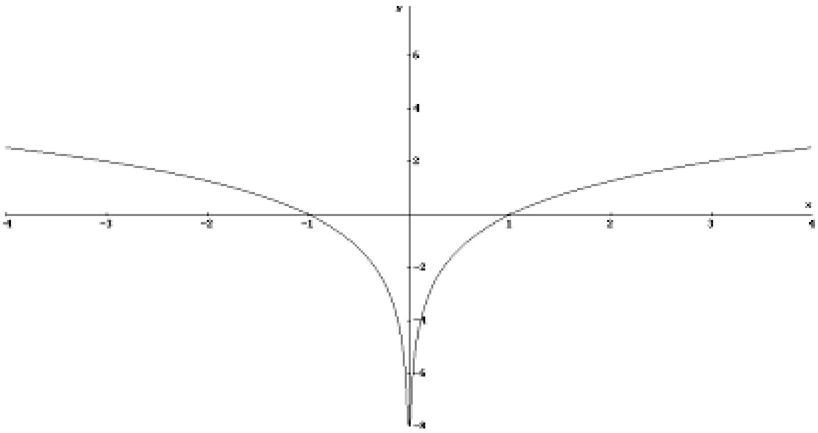
De esta manera se puede obtener la gráfica de $y = \log_3(81x)$ corriendo la gráfica de $y = \log_3 x$ cuatro unidades hacia arriba (ver figura siguiente).



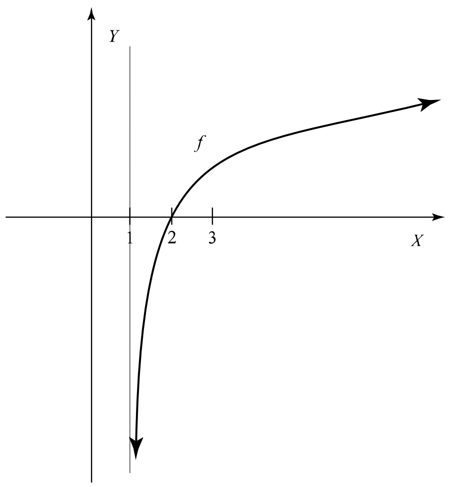
2. Trazar la gráfica de la ecuación $y = \log_3\left(x^2\right)$.

Solución
Dado que $x^2 = |x|^2$ podemos reescribir la función dada como $y = \log_3|x|^2 = 2\log_3|x|$.

Luego la gráfica de $y = 2\log_3|x|$ se obtiene multiplicando por dos las coordenadas de los puntos de la gráfica de la función $y = \log_3|x|$.



3. Realice el esbozo de la gráfica de la función $f : \left]1, +\infty\right[\to \mathbb{R}$



Propiedades de los logaritmos

Las siguientes propiedades son válidas para todo $a,\ x,\ y \in \mathbb{R};\ a > 0$ y $a \neq 1$.

1. $\log_a x = y \iff a^y = x$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a\left(x \cdot y\right) = \log_a\left(x\right) + \log_a\left(y\right)$

5. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

6. $\log_a x^n = n\cdot\log_a x$

7. $\log_a \sqrt[n]{x^m} = \dfrac{m}{n}\cdot\log_a x = \dfrac{m\log_a x}{n}$

8. $a^{\log_a x} = x$

9. $\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

10. $\log_b a = \dfrac{\log_c(a)}{\log_c(b)}=\dfrac{\log(a)}{\log(b)}=\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$ (propiedad del cambio de bases).

Ejercicio

Si $b, x\in\mathbb{R}^+-\{1\}$, compruebe que $\log_x b^n = \dfrac{n}{\log_b x}$

Simplificación y amplificación de expresiones logarítmicas

Ejemplos

Exprese en un solo logaritmo las siguientes expresiones.

1. $\log(c)-\log(x)+\log(x+1)$

Solución

$$\log(c)-\log(x)+\log(x+1)=\log\frac{c}{x}+\log(x+1)=\log\frac{c(x+1)}{x}$$

Ejercicios

Exprese en un solo logaritmo las siguientes expresiones.

1. $\log_3 5-\log_3(x)+2\log_3(5-x)$ R/ $\log_3\left[\dfrac{5(5-x)^2}{x}\right]$

2. $\dfrac{1}{3}\log_a(25-x^2)-\dfrac{1}{3}\log_a(5-x)$ R/ $\log_a(x+5)^{\frac{1}{3}}$

3. $2\log_a(x)+\log_a(y)-3\log_a(z)$ R/ $\log_a\left(\dfrac{x^2y}{z^3}\right)$

4. $3\log_a(x)-2\log_a(x)+\dfrac{1}{2}\log_a(x)$ R/ $\log_a\left(x\sqrt{x}\right)$

5. $\log_5(x^2-4)+\log_5 8-\log_5(x-2)^2$ R/ $\log_5\left[\dfrac{8(x+2)}{x-2}\right]$

6. $\log(4-x^2)-\dfrac{1}{2}\log(2-x)+\dfrac{1}{2}\log(x)$ R/ $\log\left(\sqrt{x(2-x)}\,(x+2)\right)$

Ejemplo

Exprese como suma y diferencia de logaritmos la siguiente expresión

$\log_4 \dfrac{x^2 y^4}{\sqrt{xyz}}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log_4 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{xyz}} &= \log_4 x^2 y^4 - \log_4 \sqrt{xyz} \\
&= \log_4 x^2 + \log_4 y^4 - \frac{1}{2}\log_4 xyz \\
&= 2\log_4 x + 4\log_4 y - \frac{1}{2}\left(\log_4 x + \log_4 y + \log_4 z\right) \\
&= 2\log_4 x - \frac{1}{2}\log_4 x + 4\log_4 y - \frac{1}{2}\log_4 y - \frac{1}{2}\log_4 z \\
&= \frac{3}{2}\log_4 x + \frac{7}{2}\log_4 y - \frac{1}{2}\log_4 z
\end{aligned}$$

Ejercicios

Exprese como suma y diferencia de logaritmos las siguientes expresiones.

1. $\log \sqrt[6]{a^{-4}b^3}$
2. $\log \dfrac{\sqrt[3]{ab^2c^2}}{(abc)^{\frac{1}{6}}}$
3. $\log\left(\sqrt[5]{a^{-2}b^3}\right)^6$
4. $\log_a\left[\dfrac{x(y+1)^4}{z^3}\right]$
5. $\log\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b^3}} \cdot \sqrt{b^3\sqrt{a}}\right)^2$

Identidades logarítmicas

Ejemplo

Compruebe la siguiente identidad logarítmica.

$\ln(x+1)+\ln(x-1)-\ln(x^2-1)=0$

Solución

$$\begin{aligned}\ln(x+1)+\ln(x-1)-\ln(x^2-1) &= \ln(x+1)+\ln(x-1)+\ln(x^2-1)^{-1}\\ &= \ln\left[\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2-1)}\right]\\ &= \ln\left[\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right]=\ln(1)=0\end{aligned}$$

Ejercicios

Compruebe las siguientes identidades logarítmicas.

1. $\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x^2-1}{2}\right)+\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{x-1}{2x+2}\right)=\log_a(x-1)-\log_a 2$
2. $\frac{1}{4}\log_a(x^2+3x+2)+\frac{1}{4}\log_a\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\log_a\sqrt{x+1}$
3. $l\,\text{og}\left(\frac{27}{28}\right)+\log\left(\sqrt{98}\right)+\log\left(\sqrt{8}\right)=3\log 3$
4. $\log(xy)+\log\left(\frac{x}{y}\right)+\log\left(\sqrt{x}\right)=\frac{5}{2}\log(x)$
5. $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot l\,\text{og}_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_4 6=\frac{1}{2}$
6. $\log_2 8++\log_2 2+3\log_3 27=13$
7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{64}\cdot 2\cdot 8\right)=-3$
8. $\frac{\log_a m}{\log_{ab} m}=1+\log_a b$

Ecuaciones logarítmicas

Las soluciones de las ecuaciones logarítmicas **siempre se deben probar** porque el dominio de la función $f(x)=\log_a(x)$ es $\mathbb{R}^+$.

Para resolver ecuaciones logarítmicas es importante tener un solo término a cada lado de la igualdad.

Ejemplos
Resuelva las siguientes ecuaciones y dé el conjunto solución.

1. $\log_3 \dfrac{x-1}{x-3}=1$

Solución

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{x-1}{x-3}=1 &\Leftrightarrow 3^1=\frac{x-1}{x-3}\\ &\Rightarrow 3=\frac{x-1}{x-3}, \quad x\neq 3\\ &\Rightarrow 3x-9=x-1 \Rightarrow 3x-x=-1+9\\ &\Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4\end{aligned}$$

Prueba

$$\log_3 \frac{x-1}{x-3}=\log_3 \frac{4-1}{4-3}=\log_3 \frac{3}{1}=\log_3 3=1$$

Por lo tanto, $S=\{4\}$

2. $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

Solución

$$\begin{aligned}&\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)\\ &\Rightarrow \log_2\left(9^{x-1}+7\right)-\log_2\left(3^{x-1}+1\right)=2\\ &\Rightarrow \log_2 \frac{3^{2x-2}+7}{3^{x-1}+1}=2\\ &\Rightarrow 2^2=\frac{3^{2x-2}+7}{3^{x-1}+1}\\ &\Rightarrow 4\left(3^{x-1}+1\right)=3^{2x-2}+7\\ &\Rightarrow 4\cdot 3^{x-1}+4-7-3^{2x-2}=0\\ &\Rightarrow -\left(3^{x-1}\right)^2+4\cdot 3^{x-1}-3=0\end{aligned}$$

Sea $3^{x-1}=m$, por tanto;

$$-\left(3^{x-1}\right)^2+4\cdot 3^{x-1}-3=0\Rightarrow -m^2+4m-3=0$$
$$\Rightarrow m_1=3\vee m_2=1$$

a) $m_1=3$ y $3^{x-1}=m$

$3^{x-1}=3\Leftrightarrow x-1=1\Rightarrow x=2$

b) $m_2=1$

$3^{x-1}=1\Leftrightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

Prueba

i) $x=2$

Dada la ecuación $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

$\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=\log_2\left(9^{2-1}+7\right)=\log_2\left(9^1+7\right)=\log_2(16)=4$

$2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)=2+\log_2\left(3^{2-1}+1\right)=2+\log_2(4)=2+2=4$

Por tanto, $x=2$ es parte del conjunto solución de la ecuación.

ii) $x=1$

Dada la ecuación $\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)$

$\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=\log_2\left(9^{1-1}+7\right)=\log_2(1+7)=\log_2(8)=3$

$2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right)=2+\log_2\left(3^{1-1}+1\right)=2+\log_2(2)=2+1=3$

Por tanto, $x=1$ es parte del conjunto solución de la ecuación.

De i) y ii) se tiene que $S=\{1,2\}$.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones y dé el conjunto solución.

1. $2=\log(2x+50)$ R/ $S=\{25\}$
2. $2\log(x)=6\log 2$ R/ $S=\{8\}$
3. $\log_6(x+2)+\log_6(x+3)=1$ R/ $S=\{0\}$
4. $\log_a(x)+\log_a(x-1)=\log_a 2$ R/ $S=\{2\}$
5. $\log(x+5)^2-\log(x+5)=\log 2$ R/ $S=\{-3\}$
6. $\log_{16}(x)+\log_4(x)+\log_2(x)=7$ R/ $S=\{16\}$
7. $\log_x\left(x^2\right)=3$ R/ $S=\{\ \}$

8. $\dfrac{\log(x+1)}{\log(x-1)}=2$ R/ $S=\{3\}$

9. $(\ln x)^2+6=5\ln(x)$ R/ $S=\{e^2,\ e^3\}$

10. $\log_3(7-x)=1+\log_3(1-x)$ R/ $S=\{-2\}$

11. $\ln(5x-1)-\ln(x+4)=0$ R/ $S=\left\{\dfrac{5}{4}\right\}$

12. $\log_2\left(\log_2 x^2\right)=2$

13. $\log\sqrt{x}=\sqrt{\log x}$

14. $\ln^3 x+\ln^2 x=-\dfrac{1}{4}\ln x$

Inecuaciones logarítmicas

El conjunto solución de las inecuaciones logarítmicas siempre debe intersecarse con el dominio de la misma.

Ejemplos

1. Resuelva la inecuación $\log_3(2-x)>\log_3(x-1)$.

En primera instancia debe determinarse el dominio de la inecuación, esto es

$$2-x>0 \ \wedge \ x-1>0 \Rightarrow 2>x \ \wedge \ x>1 \Rightarrow x\in\left]-\infty,2\right[\cap\left]1,+\infty\right[\Rightarrow x\in\left]1,2\right[$$

Ahora se define una función de apoyo a saber: $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\log_3 x$, esta función es creciente, por tanto

$$\log_3(2-x)>\log_3(x-1)\Rightarrow 3^{\log_3(2-x)}>3^{\log_3(x-1)}\Rightarrow 2-x>x-1\Rightarrow 3>2x\Rightarrow \frac{3}{2}>x$$

Ahora el conjunto de solución de la inecuación sería la intersección entre el dominio de la inecuación y el conjunto $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$

$$\left]1,2\right[\cap\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[=\left]1,\frac{3}{2}\right[$$

2. $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{2}{3}$

Solución

$$2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_8\frac{(x-2)^2}{x-3}>\frac{2}{3};\ \text{ recuerde que } \frac{(x-2)^2}{x-3}>0$$

Luego $\dfrac{(x-2)^2}{x-3}>8^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x-3}>4 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{x-3}-4>0$

Al resolver esta última inecuación se obtiene que el conjunto solución de $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{2}{3}$ es $S=\left]2,\,3\right[\cup\left]4,\,+\infty\right[$.

Ejercicio

Resuelva la inecuación $\log(2-x)+\log(3x+2)>\log(x+6)+\log(x-6)$

Inecuaciones exponenciales (usando logaritmos para resolverlas)

Ejemplos

Resuelva las siguientes inecuaciones exponenciales.

1. $4^{\frac{x}{x+2}}<8^{\frac{x-2}{x+2}}$

Solución

$$4^{\frac{x}{x+2}}<8^{\frac{x-2}{x+2}} \Rightarrow 2^{2\left(\frac{x}{x+2}\right)}<2^{3\left(\frac{x-2}{x+2}\right)} \Rightarrow 2^{\frac{2x}{x+2}}<2^{\frac{3(x-2)}{x+2}}$$

$$\Rightarrow \log_2 2^{\frac{2x}{x+2}}<\log_2 2^{\frac{3(x-2)}{x+2}} \Rightarrow \frac{2x}{x+2}<\frac{3(x-2)}{x+2} \Rightarrow \frac{2x}{x+2}-\frac{3(x-2)}{x+2}<0 .$$

Resolviendo esta última inecuación se tiene que el conjunto solución de $4^{\frac{x}{x+2}}<8^{\frac{x-2}{x+2}}$ es $S=\left]-\infty,\,-2\right[\cup\left]6,\,+\infty\right[$.

2. $2^x>3$

Solución

$$2^x>3 \Leftrightarrow \log_2 2^x>\log_2 3 \Leftrightarrow x\log_2 2>\log_2 3 \Leftrightarrow x>\log_2 3$$

$$S=\left]\log_2 3,\ +\infty\right[$$

Problemas de aplicación

Ejemplos

1. Cálculo de la penetración de la luz en el mar

La ley de Beer-Lamber expresa que la cantidad de luz I que penetra a una profundidad de x metros en el mar viene dada por $I = I_0 c^x$ donde $0 < c < 1$ e I_0 es la cantidad de luz en la superficie.

a) Despeje x mediante logaritmos comunes.

b) Si $c = \frac{1}{4}$ calcule la profundidad a la que $I = 0,01 \cdot I_0$ (esto determina la zona donde puede tener lugar la fotosíntesis).

Solución

a) $I = I_0 c^x \Rightarrow \frac{I}{I_0} = c^x \Rightarrow x = \log_c \frac{I}{I_0} \Rightarrow x = \frac{\log\left(I / I_0 \right)}{\log c}$

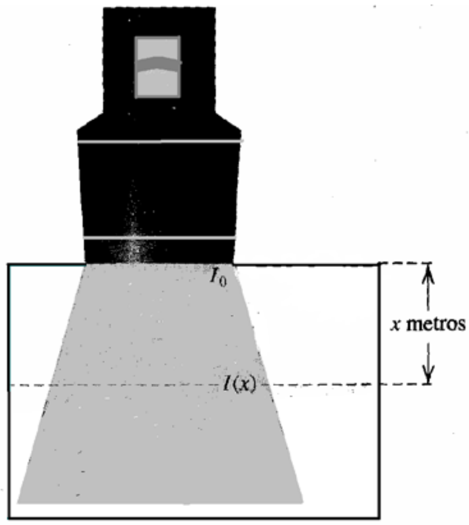
b) Con $I = 0,01 \cdot I_0$ y $c = \frac{1}{4}$ en la fórmula para x del inciso a) tenemos que

$$x = \frac{\log\left(0,01 \cdot I_0 / I_0 \right)}{\log \frac{1}{4}} = \frac{\log(0,01)}{\log 1 - \log 4} = \frac{\log 10^{-2}}{0 - \log 4} = \frac{-2}{-\log 4} = \frac{2}{\log 4}$$

Así, una aproximación a la profundidad a la que $I = 0,01 \cdot I_0$ es $x \approx 3,32\, m$.

2. Comparación de intensidades luminosas

Si un haz de luz con intensidad I_0 se proyecta verticalmente hacia abajo en el agua, su intensidad $I(x)$ a una profundidad de x metros es $I(x) = I_0 e^{-1,4x}$ (ver figura adjunta). ¿A qué profundidad tendrá la mitad de su valor en la superficie?



Solución

En la superficie, $x=0$ y la intensidad es $I(0)=I_0e^0=I_0$.

Deseamos hallar el valor de x tal que $I(x)=\frac{1}{2}I_0$; ésto lleva a

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2}I_0 \\ I_0e^{-1,4x} &= \frac{1}{2}I_0 \\ e^{-1,4x} &= \frac{1}{2} \\ -1,4x &= \ln\frac{1}{2} \\ x &= \frac{\ln\frac{1}{2}}{-1,4} \end{aligned}$$

Una aproximación es $x \approx 0,495\,m$.

Bibliografía

Alpízar, M. (2014). Notas de clase, curso Matemática Fundamental II. Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

Arias, F. y Barrantes, H. (2010). Introducción a la matemática formal de las funciones. San José, Costa Rica: Editorial UCR.

Chaves, E. (2007). Notas de clase, curso Matemática Fundamental II. Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

Stewart, J., Redlin. L. y Watson, S. (2001). Precálculo. México: International Thomson Editores.

Swokowski, E. y Cole, J. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: International Thomson Editores.

Wisniewski, P. y Gutiérrez, A.L. (2003). Introducción a las matemáticas universitarias. México, D. F.: Editorial McGraw-Hill.